РОССИЙСКАЯ ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ШКОЛА

NEW ECONOMIC SCHOOL

ПОСОБИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В РЭШ

Москва 2002

Булавский В. А., Головань С. В., Катышев П. К., Фридман А. А.

Пособие по математике для поступающих в Российскую Экономическую Школу. — М., 2002 — 56 с.

Данное пособие содержит информацию о вступительном экзамене по математике в РЭШ и дополняет Справочник для поступающих в РЭШ, 2001/2002.

© Российская Экономическая Школа, 2002

Содержание

Пособие по математике для поступающих в РЭШ содержит информацию о вступительном экзамене по математике и дополняет Справочник для поступающих в РЭШ, 2001/2002.

Содержание экзамена в течение ряда лет оставалось неизменным, хотя формы экзамена менялись.

В пособии описывается содержание и структура вступительного экзамена. Требования, предъявляемые на вступительных экзаменах, содержатся в справочнике для поступающих в РЭШ.

Пособие содержит подробную программу вступительного экзамена, варианты вступительных экзаменов 1999—2001 годов с решениями, а также описание структуры вступительного экзамена 2002 года.

Разбирая решения задач (и ответы на тестовые вопросы, а также соответствующие пояснения) полезно обратить внимание не только на формулировку и содержание каждой задачи, но и на правильное оформление решения, которое должно быть исчерпывающим, логически верным и грамотно изложенным.

Приводя решения задач, мы стремились показать как правильно решать задачи. Мы не всегда приводим самые лучшие, самые изящные, самые короткие решения, которые может придумать опытный математик. Мы стремились привести самое естественное решение задачи и доводили его до конца логически строго, описывая основные этапы процесса решения, соответствующие аргументы для приводимых утверждений и логические переходы. Все эти факторы (элементы) влияют на конечную оценку решения задачи и экзаменационной работы в целом.

1 Программа вступительного экзамена

1.1 Математический анализ

1. **Элементы теории множеств**

   Понятие о множествах и их элементах. Подмножества. Операции над множествами: объединение, пересечение, разность. Декартово произведение двух и более множеств; проекции элемента декартова произведения.

   Отображение одного множества в другое; область определения, область значений, график отображения. Тождественное отображение множества в себя. Образ элемента или множества из области определения; (полный) прообраз элемента или множества из области значений. Композиция (суперпозиция) отображений.

   Взаимно однозначные отображения (вложения) и отображения «на» (накрытия). Обратное отображение. Равномощные (эквивалентные по мощности) множества. Конечные и счетные множества. Счетность множества рациональных чисел. Мощность подмножества счетного множества. Мощность конечного или счетного объединения счетных множеств.

2. **Числовая прямая $\mathbf{R}$ и арифметическое пространство $\mathbf{R}^n$**

   Вещественные (действительные) числа. Открытый, замкнутый, полуоткрытый отрезки. Понятие мажоранты (верхней границы) и миноранты (нижней границы) подмножества вещественных чисел, ограниченного (сверху, снизу) множества, наибольшего и наименьшего элемента множества, (точной) верхней и нижней граней.

   Свойство полноты числовой прямой: теорема о существовании верхней (нижней) грани и теорема о непустоте пересечения вложенных отрезков. Плотность множества рациональных чисел как подмножества числовой прямой. Несчетность отрезка числовой прямой; мощность континуума.

   Арифметическое (числовое, координатное) пространство $\mathbf{R}^n$. Операции сложения элементов (векторов, точек) $\mathbf{R}^n$ и умножения их на число. Понятие ограниченного множества в $\mathbf{R}^n$.

3. **Свойства множеств на числовой прямой и в $\mathbf{R}^n$**

   Понятие ε-окрестности точки на числовой прямой. Открытый параллелепипед в $\mathbf{R}^n$ как декартово произведение открытых числовых отрезков. Общее понятие окрестности точки числовой прямой и точки пространства $\mathbf{R}^n$. Системы кубических и шаровых ε-окрестностей.

Внутренние, внешние и граничные точки множества. Внутренность, внешность и граница множества. Изолированные и предельные точки множества. Открытые и замкнутые множества. Теоремы об объединении и пересечении открытых и замкнутых множеств. Замыкание множества. Дополнения к открытым и замкнутым множествам.

Теорема о непустоте пересечения вложенных замкнутых параллелепипедов (полнота $\mathbf{R}^n$). Понятие компактного (т. е. ограниченного и замкнутого) множества в $\mathbf{R}^n$ и на числовой прямой. Непустота пересечения вложенных непустых компактных множеств. Теорема о выделении конечного открытого покрытия компактного множества в $\mathbf{R}^n$ (на числовой прямой $\mathbf{R}$).

4. **Предел последовательности**

Понятие последовательности точек $\mathbf{R}^n$ (или точек числовой прямой $\mathbf{R}$) и ее предела. Подпоследовательности и предельные точки (частичные пределы). Предел подпоследовательности сходящейся последовательности. Теорема Больцано—Вейерштрасса о выделении сходящейся подпоследовательности из ограниченной последовательности точек $\mathbf{R}^n$. Понятие фундаментальной последовательности (последовательности Коши). Эквивалентность понятий сходящейся и фундаментальной последовательности в $\mathbf{R}^n$.

Числовые последовательности: существование предела у монотонной ограниченной последовательности; предельный переход в неравенствах; понятие верхнего и нижнего предела. Теоремы о пределе суммы, разности, произведения, частного двух последовательностей.

5. **Предел функции. Непрерывность функций (отображений)**

Числовые (скалярные) функции как отображения подмножеств $\mathbf{R}^n$ или числовой прямой в числовую прямую. Определение предела функции в точке на языке «ε–δ»; понятие предела на бесконечности. Арифметические операции над функциями с общей областью определения. Теоремы о пределе суммы, разности, произведения, частного двух функций. Предельный переход в неравенствах.

Определение непрерывности функции на языке «ε–δ», в терминах предела функции и на языке последовательностей; их эквивалентность. Непрерывность суперпозиции непрерывных функций.

Ограниченность непрерывной числовой функции и достижение ею своего наибольшего и наименьшего значений на компактном множестве в $\mathbf{R}^n$ (теоремы Вейерштрасса).

Понятие равномерной непрерывности числовой функции на некотором множестве в $\mathbf{R}^n$ или $\mathbf{R}^1$. Равномерная непрерывность непрерывной функции на компактном множестве.

Функциональные последовательности. Поточечная и равномерная сходимость функциональной последовательности. Непрерывность функции, являющейся поточечным пределом равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций.

6. Числовые функции одного (числового) аргумента

Односторонние пределы и классификация точек разрыва. Понятие предела на $-\infty$ и $+\infty$. Монотонные функции; виды разрывов монотонной функции. Теорема о существовании и непрерывности обратной функции.

Пределы

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x},\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}.$$

Непрерывность элементарных функций.

Теорема о промежуточных значениях функции, непрерывной на отрезке (теорема Коши).

7. Дифференцирование функций в $\mathbf{R}^1$

Производная, ее геометрический и физический смысл; односторонние производные, бесконечные производные. Непрерывность функции, имеющей производную. Производная суммы, произведения, частного двух функций. Производная сложной функции. Производные элементарных функций. Первый дифференциал и его геометрический смысл.

Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши. Правило Лопиталя. Производные высших порядков. Формула Тейлора (Маклорена). Разложение по формуле Маклорена некоторых элементарных функций. Применение формулы Тейлора для приближенных вычислений значений функции. Признаки возрастания и убывания функции. Понятие локального и глобального экстремума. Стационарные точки. Достаточные условия экстремума. Случай отсутствия производных в отдельных точках. Выпуклые и вогнутые функции, их графики. Точки перегиба. Решение простейших экстремальных задач.

8. Производные и дифференциалы функций нескольких переменных (в $\mathbf{R}^n$)

Частные производные. Дифференцируемость. Первый дифференциал. Связь дифференцируемости и непрерывности. Необходимое условие дифференцируемости, достаточное условие дифференцируемости (в терминах существования и свойств частных производных). Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Производная по направлению. Градиент. Ортогональность градиента множеству уровня. Дифференцирование сложной функции. Частные производные высших порядков. Достаточные условия равенства смешанных производных. Формула Тейлора. Теорема о неявной функции.

9. Методы оптимизации в $\mathbb{R}^n$

Понятие экстремума (локального максимума или локального минимума). Экстремум при отсутствии ограничений; необходимые и достаточные условия локального экстремума. Экстремум при наличии ограничений в форме уравнений (условный экстремум); метод множителей Лагранжа; достаточные условия экстремума при наличии ограничений. Применение метода множителей Лагранжа для поиска наибольшего (наименьшего) значения функции на ограниченном замкнутом множестве, заданном системой уравнений.

10. Неопределенный интеграл

Понятие первообразной и неопределенного интеграла. Свойства неопределенного интеграла, таблица интегралов элементарных функций. Приемы интегрирования. Интегрирование рациональных дробей, простейших иррациональных функций, простейших трансцендентных функций.

11. Определенный интеграл

Задача отыскания площади криволинейной трапеции. Определенный интеграл как предел интегральных сумм. Суммы Дарбу. Критерий интегрируемости. Интегрируемость непрерывных функций, монотонных ограниченных функций, функций с конечным числом точек разрыва. Свойства определенного интеграла. Теорема о среднем. Существование первообразной непрерывной функции. Формула Ньютона—Лейбница. Замена переменной под знаком интеграла. Интегрирование по частям.

12. Числовые и функциональные ряды

Понятие числового ряда и его суммы. Сходящиеся и расходящиеся ряды. Примеры. Необходимое условие сходимости ряда. Критерий Коши сходимости ряда. Знакопостоянные и знакопеременные ряды. Признаки сравнения рядов. Признаки сходимости Даламбера и Коши. Интегральный признак Коши. Признак Лейбница для знакочередующихся рядов. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Теорема о перестановке членов условно сходящегося ряда (теорема

Римана).

Поточечная и равномерная сходимость функциональных рядов. Необходимое и достаточное условие равномерной сходимости. Признаки равномерной сходимости. Теоремы о равномерно сходящихся функциональных рядах.

13. Степенные ряды

Радиус и промежуток сходимости степенного ряда. Формулы для определения радиуса сходимости. Почленное дифференцирование и интегрирование степенных рядов, неизменность радиуса сходимости. Разложение элементарных функций в степенные ряды. Теорема Вейерштрасса о приближении непрерывных функций многочленами.

14. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение дифференциального уравнения первого порядка. Понятие общего и частного решения. Теорема существования и единственности решения. Уравнения с разделяющимися переменными и сводящиеся к ним. Линейные однородные и неоднородные уравнения. Уравнения в полных дифференциалах.

1.2 Литература

1. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н., *Лекции по математическому анализу*. М., «Высшая школа», 1999.

2. Бугров Я. С., Никольский С. М., *Дифференциальное и интегральное исчисление*. М., «Наука», 1980.

3. Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А., *Задачи и упражнения по математическому анализу*. В 2 кн., М, «Высшая школа», 2000.

4. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х., *Математический анализ*. Т. 1, 2, М., Изд-во МГУ, 1958—87.

5. Колмогоров А. Н., Фомин С. В., *Элементы теории функций и функционального анализа*. М., «Наука», 1989.

6. Кудрявцев Л. Д., *Курс математического анализа*. Т. 1, 2. М., «Наука», 1981.

7. Понтрягин Л. С., *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. М., «Наука», 1982.

8. Фихтенгольц Г. М., *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. Т. 1, 2, М.—Л., Гостехиздат, 1951.

9. Фихтенгольц Г. М., *Основы математического анализа*. Т. 1, 2, М., «Наука», 1964.

10. Эльсгольц Л. Э., *Дифференциальные уравнения*. М., Гостехиздат, 1957.

Разумеется, можно пользоваться и более поздними изданиями указанных в программе книг, а также другими источниками.

1.3 Линейная алгебра

1. Матрицы и операции с ними

Понятие прямоугольной матрицы; операции сложения матриц, умножения матрицы на число, умножения матриц. Единичная и нулевая матрицы. Трактовка пространства $\mathbf{R}^n$ как пространства векторов-столбцов или пространства векторов-строк. Умножение матрицы на столбец и строки на матрицу как частный случай умножения матриц. Свойства ассоциативности и дистрибутивности операций с матрицами. Операция транспонирования; транспонирование суммы и произведения матриц. Понятие симметричной матрицы.

2. Векторные пространства

Общее определение (вещественного) линейного пространства; примеры. Понятие системы векторов. Линейные комбинации системы векторов; понятие линейной зависимости и независимости системы векторов. Условие сохранения линейной независимости при расширении системы векторов. Теорема о линейной зависимости системы векторов, линейно выражающихся через систему с меньшим числом векторов. Понятие ранга системы векторов.

Понятие базиса векторного пространства. Конечномерные пространства. Примеры базисов. Равномощность базисов (в конечномерном пространстве) и понятие размерности. Линейная зависимость системы из $n+1$ вектора в n-мерном пространстве. Возможность дополнения до базиса любой линейно независимой системы векторов. Базис как максимальная линейно независимая система векторов. Однозначность разложения вектора по данному базису; координаты. Соответствие между векторами и их координатами. Трактовка координат как элементов (координатного) пространства $\mathbf{R}^n$. Сохранение линейной зависимости и независимости при переходе от системы векторов к системе их координат.

Понятие подпространства, собственного подпространства. Конечномерность подпространства конечномерного пространства; неравенство между их размерностями. Линейная оболочка системы векторов как подпространство. Ранг системы векторов и размерность его линейной оболочки. Линейные (аффинные) многообразия как сдвиги подпространств; аналогия с прямыми и плоскостями в трехмерном геометрическом пространстве.

Операции с подпространствами: пересечение и векторная сумма. Понятие прямой суммы двух (и более) подпространств. Связь размерностей суммы и пересечения с размерностями исходных (двух) подпространств; случай прямой суммы.

3. Системы линейных (алгебраических) уравнений

Представление совокупности неизвестных системы линейных уравнений и правых частей как векторов в $\mathbf{R}^n$ (в форме векторов-столбцов или векторов-строк). Матрица системы и матрично-векторная ее запись. Представление прямоугольной матрицы в виде семейства ее столбцов или семейства строк; теорема о совпадении рангов этих семейств (теорема о ранге матрицы); ранг матрицы, ранг системы уравнений. Понятие о матрицах полного ранга. Вырожденные и невырожденные квадратные матрицы. Трактовка системы линейных уравнений как задачи о разложении правой части по столбцам матрицы системы. Условие существования решения при любой правой части (для данной матрицы системы) и условие единственности или отсутствия решения в терминах ранга матрицы. Теорема Кронекера—Капелли.

Множество решений однородной системы линейных уравнений как подпространство в $\mathbf{R}^n$, его размерность; базис подпространства решений (фундаментальная система решений) и запись общего решения в форме линейной комбинации с неопределенными коэффициентами. Возможность задания любого подпространства в $\mathbf{R}^n$ как множества решений некоторой системы линейных однородных уравнений.

Связь множества решений совместной неоднородной системы и соответствующей ей однородной системы; запись общего решения. Прямая и гиперплоскость в $\mathbf{R}^n$. Возможность задания любого линейного (аффинного) многообразия в $\mathbf{R}^n$ как множества решений некоторой системы линейных уравнений.

Системы линейных уравнений с квадратной невырожденной матрицей; существование и единственность решения. Понятие обратной матрицы; ее существование и единственность для любой невырожденной матрицы и отсутствие для вырожденной матрицы. Невырожденность обратной матрицы; повторное обращение. Умножение системы линейных уравнений на невырожденную квадратную матрицу как эквивалентное преобразование системы. Использование эквивалентных преобразований для вычисления ранга матрицы и поиска общего решения системы линейных уравнений.

4. Определитель матрицы

Определитель квадратной матрицы. Неизменность определителя при транспонировании матрицы. Смена знака определителя при перестановке двух строк или двух столбцов матрицы. Линейность определителя по каждой строке и каждому столбцу. Равенство нулю определителя как необходимое и достаточное условие вырожденности матрицы. Определитель произведения матриц, определитель обратной матрицы.

Понятие минора произвольного порядка; определение ранга матрицы в терминах миноров. Алгебраические дополнения элементов матрицы и формулы разложения определителя по строке или столбцу. Формулы Крамера для решения системы линейных уравнений с квадратной невырожденной матрицей. Присоединенная матрица и ее связь с обратной.

Вычисление определителя путем преобразования матрицы.

5. Линейные операторы

Линейный оператор как линейное отображение векторного пространства X в векторное пространство Y; примеры. Совокупность $L(X, Y)$ всех линейных операторов из X в Y как векторное пространство. Образ и ядро линейного оператора. Суперпозиция линейных операторов.

Матрица линейного оператора из X в Y для фиксированных базисов этих пространств. Соответствие между действиями над операторами и над их матрицами; матрица суперпозиции операторов. Матрицы перехода при смене базисов в X и Y, их невырожденность; преобразование матрицы линейного оператора при смене базисов.

6. Линейные преобразования векторных пространств

Линейные операторы, действующие из векторного пространства X в себя; тождественный оператор; преобразование подобия для их матриц при смене базиса в X. Обратный оператор и его матрица; условие обратимости оператора в терминах его ядра и образа.

Инвариантные подпространства оператора. Инвариантность образа и ядра оператора.

Собственные векторы и собственные числа линейного оператора и его матрицы. Характеристический многочлен матрицы оператора, его неизменность при преобразовании подобия. Спектр оператора и матрицы, его совпадение с множеством нулей характеристического многочлена. Собственное подпространство, соответствующее данному собственному числу.

Линейная независимость системы собственных векторов, соответствующих разным собственным числам. Матрицы (линейные операторы) простой структуры; диагональный вид матрицы в базисе из собственных векторов (приведение матрицы простой структуры к диагональному виду преобразованием подобия). Собственные числа и собственные векторы оператора проектирования.

7. Евклидовы пространства

Понятие билинейной формы. Скалярное произведение; евклидово пространство. Стандартное скалярное произведение в $\mathbf{R}^n$; примеры другого выбора скалярного произведения. Длина вектора и угол между векторами (при данном выборе скалярного произведения). Неравенство Коши—Буняковского (неравенство Шварца).

Понятие ортогональности векторов; линейная независимость системы ненулевых попарно ортогональных векторов. Процесс ортогонализации и существование ортонормированного базиса. Выражение скалярного произведения двух векторов через их координаты в ортонормированном базисе. Ортогональное дополнение подпространства; ортогональный проектор.

Линейные операторы, сохраняющие скалярное произведение (изометрия евклидовых пространств); их матрицы в ортонормированном базисе (ортогональные матрицы). Невырожденность ортогональных матриц, совпадение обратной и транспонированной, произведение ортогональных матриц. Определитель и собственные числа ортогональной матрицы. Матрицы перестановки, матрицы вращения, матрицы отражения.

Самосопряженные (симметричные) операторы, симметричность их матриц в ортонормированном базисе. Ортогональность собственных векторов, соответствующих различным собственным числам. Существование ортонормированного базиса, состоящего из собственных векторов симметричного оператора. Приведение симметричной матрицы к диагональной форме преобразованием подобия с ортогональной матрицей перехода. Самосопряженность ортогонального проектора. Классификация симметричных матриц по их спектру: положительно (отрицательно) определенные; неотрицательно (неположительно) определенные или полуопределенные; неопределенные.

8. **Квадратичные формы**

   Квадратичная форма. Задание квадратичной формы при помощи симметричной матрицы. Преобразование матрицы квадратичной формы при замене переменных. Приведение квадратичной формы к каноническому виду (с диагональной матрицей) преобразованием переменных с ортогональной матрицей перехода.

1.4 Литература

1. Бугров Я. С., Никольский С. М., *Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии*. М., «Наука», 1964.

2. Воеводин В. В., *Линейная алгебра*. М., «Наука», 1974.

3. Гельфанд И. М., *Лекции по линейной алгебре*. М., 2000.

4. Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р., *Линейная алгебра и многомерная геометрия*. М., «Наука», 1970.

5. Ильин В. А., Ким Б. Г., *Линейная алгебра*. М., Изд-во МГУ, 1998.

6. Ильин В. А., Позняк Э. Г., *Линейная алгебра*. М., «Наука», 1984.

7. Кострикин И. А., Сенченко Д. В. и др., *Пособие по линейной алгебре для студентов-экономистов*. М., Изд-во МГУ, 1987.

8. Курош А. Г., *Курс высшей алгебры*. М., «Наука», 1963.

9. Скорняков Л. А., *Элементы линейной алгебры*. М., «Наука», 1980.

10. *Сборник задач по математике для ВТУЗов. Линейная алгебра и основы математического анализа*. (под ред. Ефимова Н. В., Демидовича Б. П.) М., 1981.

11. Шилов Г. Е., *Математический анализ. Конечномерные линейные пространства*. М., «Наука», 1963.

Разумеется, можно пользоваться и более поздними изданиями указанных в программе книг, а также другими источниками.

2 Вступительный экзамен 1999 г.

В 1999 г. письменный экзамен состоял из 5 задач. Тестовых вопросов не было.

2.1 Задачи

Задача 1. *(24 очка)* Заданы функция $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ и числа $a_i > 0$, $i = 1$, $\ldots$, n. Найти (если существуют) точки наибольшего и наименьшего значений функции f при ограничениях $\sum_{i=1}^{n} x_i/a_i = 1$, $i = 1$, $\ldots$, n.

Задача 2. *(17 очков)* Заданы функции $f_\delta(x) = x + \delta/x$, $g(x) = (1+x)^{1/(1+x)}$ при $x > 0$.

а) На полуоси $x > 0$ определить взаимное расположение членов последовательности $a_n = g(n)$, $n = 1, 2, \ldots$

б) Найти (если существуют) наибольший и наименьший члены последовательности $b_n = f_\delta(a_n)$ для случаев $\delta = -1$ и $\delta = 2$.

Задача 3. *(24 очка)* Исследовать функциональную последовательность $f_n(x) =$ $= x^{3n} - 2x^{2n} + x^n$ на сходимость и равномерную сходимость отдельно на каждом из трех отрезков:

$$[-1, 0], \quad \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \quad [0, 1].$$

Может ли измениться ответ для функциональной последовательности, полученной из $\{f_n(x)\}$ произвольной перестановкой ее членов?

Задача 4. *(25 очков)* При каждом значении параметра $\alpha \in \mathbf{R}$ подпространство $L(\alpha) \subset \mathbf{R}^3$ задается как множество решений системы линейных уравнений (относительно $x = (x_1, x_2, x_3)$)

$$\begin{cases} & (4-3\alpha)x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ (\alpha-2)x_1 & + \quad (\alpha-1)x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ & (2\alpha-3)x_2 & + & (\alpha-3)x_3 & = & 0 \end{cases}$$

Найти значения α и соответствующие им $(x_1, x_2, x_3) \in L(\alpha)$ при которых величина $f(\alpha, x) = \alpha^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 - 4x_2 - 2x_3$ достигает минимума.

Задача 5. *(30 очков)* Известно, что при каждом фиксированном значении параметра $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ матрица $P(\alpha)$ задает в стандартном базисе евклидова пространства $\mathbf{R}^3$ оператор ортогонального проектирования (проектор) и векторы

$$x(\alpha) = (\alpha, 1, 0), \quad y(\alpha) = (2, 2, \alpha), \quad z(\alpha) = (\alpha, 2, 2)$$

являются его собственными векторами. Найти при каждом значении параметра α матрицу $P(\alpha)$, если дополнительно известно, что ее ранг больше или равен двум.

2.2 Решения задач

Решение задачи 1. Множество V, на котором ищутся наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции $f(x)$, замкнуто, так как является пересечением замкнутой гиперплоскости с замкнутыми полупространствами. Оно также ограничено, поскольку содержится в параллелепипеде, определяемом неравенствами $0 \leqslant x_i \leqslant a_i$, $i = 1, \ldots, n$. По теореме Вейерштрасса функция на таком множестве достигает своего наибольшего и наименьшего значений. Таким образом, искомые точки существуют.

Классический метод множителей Лагранжа применяется для поиска локальных экстремумов при наличии ограничений в форме уравнений. Если же часть ограничений дана в форме нестрогих неравенств, то для каждого из них есть две возможности: выполняться в искомой точке как равенство или как строгое неравенство. При наличии n неравенств имеется 2^n логически мыслимых вариантов, хотя не все они обязательно реализуемы. Таким образом, для решения задачи нужно перебрать все варианты обращения неравенств в равенства, применить для каждого варианта метод Лагранжа и из найденных стационарных (подозрительных) точек отобрать искомые. В рассматриваемой задаче этот план можно реализовать следующим образом.

Пусть $\overline{x} = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$ — одна из искомых точек. Рассмотрим множество $J = \{i \in \overline{1,n} : \overline{x}_i > 0\}$. Таким образом, $\overline{x}_i > 0$ при $i \in J$ и $\overline{x}_i = 0$ при $i \notin J$. Множество J непустое, так как нулевая точка не удовлетворяет ограничению задачи. Положим $\varepsilon = \min\{\overline{x}_i : i \in J\}$. Число ε конечное и строго положительное. В кубической окрестности $U_\varepsilon = \{x \in \mathbf{R}^n : |x_i - \overline{x}_i| < \varepsilon\}$, $i = 1, \ldots, n$, точки $\overline{x}$ выполняются неравенства $x_i > 0$ при всех $i \in J$. Поэтому искомая точка $\overline{x}$ доставляет локальный экстремум функции $f(x)$ при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{a_i} = 1, \quad x_i = 0 \text{ при } i \notin J.$$

Другими словами, строго положительные компоненты точки $\overline{x}$ доставляют локальный экстремум функции $\sum_{i \in J} x_i^2$ при ограничении

$$\sum_{i \in J} \frac{x_i}{a_i} = 1. \tag{1}$$

Функция Лагранжа для такой задачи имеет вид

$$L(\lambda, x) = \sum_{i \in J} x_i^2 + \lambda \left(\sum_{i \in J} \frac{x_i}{a_i} - 1 \right).$$

Стационарные точки этой функции определяются уравнением (1) и равенствами

$$\frac{\partial L}{\partial x_k} \equiv 2x_k + \frac{\lambda}{a_k} = 0, \quad k \in J.$$

Выразив отсюда x_k и подставив в (1), получим

$$\lambda = -\frac{2}{\sum_{i\in J} \frac{1}{a_i^2}}, \quad x_k = \frac{1}{a_k \sum_{i\in J} \frac{1}{a_i^2}}, \quad k \in J.$$

Ввиду единственности найденной стационарной точки получаем, что

$$\overline{x}_k = \frac{1}{a_k \sum_{i\in J} \frac{1}{a_i^2}}, \quad k \in J; \qquad \overline{x}_k = 0, \quad k \notin J. \tag{2}$$

При этом

$$f(\overline{x}) = \frac{1}{\sum_{i\in J} \frac{1}{a_i^2}}. \tag{3}$$

При любом непустом подмножестве J стационарная точка (2) является допустимой для решаемой задачи. Таким образом, остается определить, какие подмножества J соответствуют наименьшему и наибольшему значениям (3). Очевидно, что наименьшее значение в (3) получается при $J = \{1, \ldots, n\}$. Наибольшее же значение получается при одноэлементных множествах $J = \{k\}$, для которых a_k наибольшее среди a_i, $i = 1, \ldots, n$.

Ответ. Наименьшее значение достигается в единственной точке $\overline{x} = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$, где

$$\overline{x}_k = \frac{1}{a_k \sum_{i\in J} \frac{1}{a_i^2}}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Наибольшее значение достигается в точке (или точках) вида $(\underbrace{0, \ldots, 0}_{k-1}, a_k, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-k})$, где $a_k = \max\{a_i, i = 1, \ldots, n\}$.

Решение задачи 2. а) На полуоси $x > 0$ функция $g(x)$ непрерывная, дифференцируемая и принимает значения, строго большие единицы. Поэтому $a_n > 1$ при всех $n = 1, 2, \ldots$. Так как $\ln g(x) = [\ln(1+x)]/(1+x)$, то $g'(x)/g(x) = [1 - \ln(1+x)]/(1+x)^2$, т. е.

$$g'(x) = \frac{g(x)}{(1+x)^2}[1 - \ln(1+x)].$$

Таким образом, $g'(x) > 0$ и $g(x)$ возрастает при $x \in (0, e-1)$; $g'(x) < 0$ и $g(x)$ убывает при $x \in (e-1, +\infty)$; $g'(e-1) = 0$ и $g(x)$ при $x = e-1$ достигает строгого максимума на полуоси $x > 0$.

Поскольку $1 < e - 1 < 2$, то $a_{n+1} < a_n$ при $n = 2, 3, \ldots$. Что касается первого члена последовательности, то $a_1 = \sqrt{2} = \sqrt[4]{4} = a_3$. Таким образом, расположение членов a_n на полуоси $x > 0$ задается соотношениями

$$\sqrt[3]{3} = a_2 > a_1 = a_3 > a_4 > \cdots > 1.$$

При этом, используя правило Лопиталя, имеем

$$\lim_{x\to+\infty} \ln g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+x} = 0.$$

Поэтому $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{\ln g(x)} = 1$ так что $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

б) Функция $f_\delta(x)$ также непрерывная и дифференцируемая при $x > 0$, причем $f'_\delta(x) = 1 - \delta/x^2$.

Пусть $\delta = -1 < 0$. Так как $f'_{-1}(x) = 1 + 1/x^2 > 0$ при всех $x > 0$, то члены последовательности b_n удовлетворяют тем же соотношениям, что и a_n, т. е.

$$b_2 > b_1 = b_3 > b_4 > \cdots .$$

В этом случае наименьшего члена b_n не существует, а наибольшим является $b_2 = \sqrt[3]{3} - 1/\sqrt[3]{3}$.

Пусть $\delta = 2$. Тогда $f'_2(x) = 1 - 2/x^2$. Поэтому $f'_2(x) > 0$ и $f_2(x)$ возрастает при $x > \sqrt{2}$; $f'_2(x) < 0$ и $f_2(x)$ убывает при $0 < x < \sqrt{2}$; $f'_2(\sqrt{2}) = 0$ и функция $f_2(x)$ в точке $x = \sqrt{2}$ достигает строгого минимума на полуоси $x > 0$. Поскольку $a_1 = a_3 = \sqrt{2}$, то члены $b_1 = b_3 = 2\sqrt{2}$ являются наименьшими членами последовательности b_n. Так как в рассматриваемом случае $b_2 > b_1 = b_3$ и

$$b_1 = b_3 < b_4 < b_5 < \cdots ,$$

то b_2 могло бы быть единственным наибольшим членом последовательности b_n. Однако, $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} (a_n + 2/a_n) = 1 + 2/1 = 3$, в то время как $b_2 = f_2(\sqrt{2}) < f_2(1) = 3$. Таким образом, при достаточно большом n окажется $b_n > b_2$, и наибольшего члена у последовательности b_n нет.

Ответ. а) $a_2 > a_1 = a_3 > a_4 > \cdots > 1$.

б) При $\delta = -1$ наибольший $b_2 = \sqrt[3]{3} - 1/\sqrt[3]{3}$, наименьшего нет; при $\delta = 2$ наименьшие $b_1 = b_3 = 2\sqrt{2}$, наибольшего нет.

Решение задачи 3. Рассмотрим сначала вопрос о поточечной сходимости. Если $|x| < 1$, то $|f_n(x)| < 4|x|^n$, так что $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Далее, $f_n(1) = 0$ при всех n, так что и $\lim_{n\to\infty} f_n(1) = 0$. В то же время $f_n(-1) = 0$ при четных n и $f_n(-1) = -4$ при нечетных n. Поэтому $\lim_{n\to\infty} f_n(-1)$ не существует. Таким образом, на отрезках $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ и $[0, 1]$ последовательность $f_n(x)$ сходится к нулевой функции, а на отрезке $[-1, 0]$ сходимости нет. Тем более на $[-1, 0]$ нет и равномерной сходимости.

На отрезке $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ отклонение $f_n(x)$ от предельной нулевой функции оценивается неравенством

$$|f_n(x)| \leqslant 4|x|^n \leqslant 2^{-(n-2)}.$$

По $\varepsilon > 0$ достаточно взять $n > 2 - \log_2 \varepsilon$, чтобы отклонение было меньше ε для всех $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Таким образом, на этом отрезке имеется равномерная сходимость. Проведем оценку отклонения на $[0, 1]$. На этом отрезке $f_n(x) = x^n(1 - x^n)^2 \geqslant 0$, так что максимальное отклонение совпадает с максимумом функции на $[0, 1]$. Имеем

$$f_n'(x) = n(3x^{2n} - 4x^n + 1)x^{n-1}.$$

Производная обращается в нуль при $x = 0$ и $x^n = 1/3$. Соответствующие значения $f_n(0) = f_n(1) = 0$, $f_n(1/\sqrt[n]{3}) = 4/27$. Таким образом, для любого n найдется точка $x_n = 1/\sqrt[n]{3}$, в которой отклонение от предельного (нулевого) значения равно $4/27$. Это противоречит определению равномерной сходимости.

Перестановка членов последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ означает, что вместо нее рассматривается последовательность $\{f_{n(k)}(x)\}_{k=1}^{\infty}$, где $n(k)$ — взаимно-однозначное отображение $k \to n(k)$ натурального ряда на себя, осуществляющее перенумерацию членов исходной последовательности.

Ясно, что на отрезке $[-1, 0]$ последовательность $\{f_{n(k)}(x)\}_{k=1}^{\infty}$, как и исходная, не сходится и, следовательно, нет и равномерной сходимости.

На отрезке $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ исходная последовательность сходится равномерно к $f(x) = 0$. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N_k, что для всякого $n > N_k$ неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \tag{4}$$

выполняется при всех $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Другими словами, лишь для конечного числа функций $f_n(x)$ (с номерами $n \geqslant N_k$) могут найтись точки $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, нарушающие неравенство (4). Поскольку последовательность $\{f_{n(k)}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ получена из $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ перенумерацией (перестановкой) членов, то нарушать неравенство (4) могут лишь те ее члены, для которых $n(k) \leqslant N_k$. Таких номеров k конечное число. Обозначив через K_ε наибольший из них, получим, что для всех $k > K_\varepsilon$ оказывается $|f_{n(k)}(x) - f(x)| < \varepsilon$ для всех $k > K_\varepsilon$, что и означает равномерную сходимость последовательности $\{f_{n(k)}(x)\}_{k=1}^{\infty}$, на отрезке $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Аналогичным образом можно показать, что на отрезке $[0, 1]$ последовательность $\{f_{n(k)}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ не сходится к $f(x) = 0$ равномерно: так как последовательность $\{f_n(x)\}$ получается из нее (обратной) перестановкой, то из равномерной сходимости на $[0, 1]$ последовательности $\{f_{n(k)}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ следовала бы равномерная сходимость на этом же отрезке и последовательности $\{f_n(x)\}$, что не имеет места.

Ответ. На промежутке $[-1, 0]$ нет сходимости; на промежутке $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ имеется равномерная сходимость; на промежутке $[0, 1]$ имеется сходимость, но нет равномерной сходимости. При перестановке членов последовательности ответ не меняется.

Замечание. Заключительную часть решения задачи 3 можно провести в более общей форме. Сходимость или равномерную сходимость функциональной последовательности на некотором множестве можно определить следующим эквивалентным образом.

Последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к $f(x)$ на множестве M, если при любом $\varepsilon > 0$ лишь для конечного числа ее членов найдется $x \in M$ (свой для каждого члена последовательности), при котором нарушается неравенство (4).

Определения в этой форме уже не зависят от порядка членов в последовательности. Поэтому наличие или отсутствие на множестве M свойства сходимости или равномерной сходимости сохраняется при любой перестановке членов последовательности.

Решение задачи 4. Если при некоторых α определитель матрицы системы отличен от нуля, то единственным решением является точка $x = (0, 0, 0)$, и $f(\alpha, 0) = \alpha^2$. Наименьшее значение при этом равно нулю и достигается при $\alpha = 0$. Рассмотрим другие возможные случаи. Так как

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 4-3\alpha & 2 \\ \alpha-2 & \alpha-1 & -1 \\ 0 & 2\alpha-3 & \alpha-3 \end{pmatrix} = (2-\alpha)\det \begin{pmatrix} 4-3\alpha & 2 \\ 2\alpha-3 & \alpha-3 \end{pmatrix} = 3(\alpha-1)(\alpha-2)^2,$$

то определитель системы обращается в нуль при $\alpha = 1$ и $\alpha = 2$.

Если $\alpha = 1$, то система уравнений принимает вид

$$x_2 + 2x_3 = 0, \quad -x_1 - x_3 = 0, \quad -x_2 - 2x_3 = 0.$$

Последнее уравнение совпадает с первым, а первое и второе линейно независимы. Таким образом, ранг системы равен 2, подпространство ее решений $L(1)$ одномерно. Общий вид векторов из $L(1)$ определяется равенствами $x_1 = -x_3$, $x_2 = -2x_3$, где x_3 произвольно. При этом $f(1, x) = 1 + x_3^2 + 4x_3^2 + x_3^2 + 2x_3 + 8x_3 - - 2x_3 = 6x_3^2 + 8x_3 + 1$. Наименьшее значение этот квадратный трехчлен достигает при $x_3 = -2/3$. При этом $x_1 = 2/3$, $x_2 = 4/3$, т. е.

$$f(1, x) = -\frac{5}{3}, \quad x = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

Если $\alpha = 2$, то система принимает вид

$$-2x_2 + 2x_3 = 0, \quad x_2 - x_3 = 0, \quad x_2 - x_3 = 0.$$

Все уравнения пропорциональны, так что ранг системы равен 1, а размерность $L(2)$ равна двум. Общий вид векторов в $L(2)$ определяется равенством $x_2 = x_3$; при этом x_1 и x_3 произвольные. Для таких x имеем

$$f(2,x) = 4 + x_1^2 + x_3^2 + x_3^2 - 2x_1 - 4x_3 - 2x_3 = (x_1-1)^2 + 2\left(x_3 - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}.$$

Наименьшее значение функции $f(2,x) = -3/2$ достигается при $x = (1, 3/2, 3/2)$. Так как $-5/3 < -3/2 < 0$, то наименьшее значение $f(\alpha,x)$ при $x \in L(\alpha)$ достигается для $\alpha = 1$ и $x = (2/3, 4/3, -2/3)$.

Ответ. $\alpha = 1$, $x = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $f(\alpha,x) = -\frac{5}{3}$.

Решение задачи 5. В $\mathbf{R}^n$ ортогональный проектор P на подпространство L (он же оператор ортогонального проектирования на L) сопоставляет каждому $x \in \mathbf{R}^n$ такой (единственный) вектор $Px \in L$, что разность $x - Px$ принадлежит $L^\perp$ — ортогональному дополнению L. Если $x \in L$, то $Px = x$, если $x \in L^\perp$, то $Px = 0$. Так как P отображает все $\mathbf{R}^n$ на L, то ранг P совпадает с размерностью L. По условию задачи $n = 3$ и $\operatorname{rank} P = r \geqslant 2$.

Если $r = 3$, то $L = \mathbf{R}^3$ и $Px = x$ при всех $x \in \mathbf{R}^3$, т. е. матрица проектора P совпадает с единичной матрицей E. Любой ненулевой вектор является собственным для P. Так как $x(\alpha)$, $y(\alpha)$, $z(\alpha)$ при всех α ненулевые, матрица E удовлетворяет условиям задачи при всех α. Пусть теперь $r = 2$, т. е. подпространство L двумерно, а $L^\perp$ одномерно. При этом L состоит из собственных векторов P, соответствующих собственному числу 1, а $L^\perp$ — из собственных векторов, соответствующих собственному числу 0 (исключая, конечно, нулевой вектор). Так как суммарная кратность собственных чисел равна 3, то других собственных векторов (и собственных чисел) быть не может.

Рассмотрим сначала случай, когда векторы $x(\alpha)$, $y(\alpha)$, $z(\alpha)$ линейно зависимые, т. е. составленный из них определитель равен нулю. Так как

$$\det\begin{pmatrix} \alpha & 2 & \alpha \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & \alpha & 2 \end{pmatrix} = \alpha\cdot(4-2\alpha) - 1\cdot(4-\alpha^2) = -(\alpha-2)^2,$$

то это возможно лишь при $\alpha = 2$. В этом случае $x(2) = (2,1,0)$, $y(2) = z(2) = (2,2,2)$. Так как эти (собственные) векторы друг другу не ортогональны, то они должны оба принадлежать либо L, либо $L^\perp$. Второй случай отпадает, так как $\dim L^\perp = 1$. В первом случае матрица $P(2)$ осуществляет ортогональное проектирование на подпространство L, натянутое на векторы $(2,1,0)$ и $(2,2,2)$. Векторы из $L^\perp$ при этом определяются равенствами

$$\begin{cases} 2x_1 + \quad x_2 \qquad\quad = 0, \\ 2x_1 + \ \ 2x_2 + \ \ 2x_3 = 0, \end{cases}$$

т. е. $x_2 = -2x_1$, $x_3 = 1$. Положив $x_1 = 1$, найдем, что $L^{\perp}$ натянуто на вектор $(1, -2, 1)$. Таким образом,

$$P(2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P(2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P(2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Объединив эти векторные равенства в одно матричное, получим,

$$P(2) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Положим $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда $\det A = 2 \cdot 6 - 1 \cdot 0 = 12$, и по формулам Крамера $A^{-1} = \dfrac{1}{12} \begin{pmatrix} 6 & 0 & -6 \\ -1 & 2 & 5 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$. Поэтому

$$P(2) = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 & -6 \\ -1 & 2 & 5 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 10 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 10 \end{pmatrix}.$$

Найдем теперь возможные решения при $r = 2$ и $\alpha \neq 2$. Так как векторы $x(\alpha)$, $y(\alpha)$, $z(\alpha)$ в этом случае линейно независимы, то два из них должны лежать в L, а один — в $L^{\perp}$. Но векторы $x(\alpha)$ и $z(\alpha)$ не ортогональны ни при каком α , так как скалярное произведение $x(\alpha) \cdot z(\alpha) = 2 + \alpha^2$ отлично от нуля при всех α. Поэтому единственная возможность — это $y(\alpha) \in L^{\perp}$, $x(\alpha)$, $y(\alpha) \in L$. Эта возможность реализуется, если одновременно

$$x(\alpha) \cdot y(\alpha) = 2 + 2\alpha = 0, \quad z(\alpha) \cdot y(\alpha) = 4 + 4\alpha = 0,$$

т. е. при $\alpha = -1$. Таким образом, при $\alpha = -1$ имеем

$$x(-1) = (-1, 1, 0), \quad y(-1) = (2, 2, -1), \quad z(-1) = (-1, 2, 2),$$

$$p(-1) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Аналогично предыдущему случаю, находим

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = -1\cdot 6 – 1\cdot 3 = -9,$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-9}\begin{pmatrix} 6 & -3 & 6 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -6 & 3 & -6 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix},$$

$$P(-1) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 & 3 & -6 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Ответ. При всех $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ решением является

$$P(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Кроме того, при $\alpha = 2$ и $\alpha = -1$ имеется дополнительное решение:

$$P(2) = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 10 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 10 \end{pmatrix}, \quad P(-1) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Замечание. В последней задаче все матрицы получились симметричными. Это отражает тот факт, что оператор ортогонального проектирования является самосопряженным (симметричным).

3 Вступительный экзамен 2000 г.

Письменный экзамен в 2000 г. состоял из 2-х частей (которые проводились в разные дни):

1. часть А — решение 4-х задач по математическому анализу и линейной алгебре, продолжительность экзамена 4 часа, максимальная оценка 8 баллов.

2. Часть Б — ответы на тестовые вопросы, продолжительность теста 3 часа, максимальная оценка 4 балла.

3. Правила оценивания части А экзамена были следующие: Для каждой задачи из части А указывалось максимальное число очков, которое можно получить за ее решение. Число баллов за часть А экзамена определялось суммой набранных при решении задач очков.

4. Тест состоял из ряда вопросов по математическому анализу и линейной алгебре следующих типов:

   а) вопросы, требующие ответа «да» или «нет»,

   б) вопросы, требующие выбора правильного ответа из нескольких предложенных вариантов.

   в) вопросы, предполагающие ответ в свободной и краткой форме.

5. Правила оценивания теста были следующие:

   Для задачи типа а)

   * за правильный ответ абитуриент получал «+1» очко,
   * за отсутствие ответа — «0» очков,
   * за неправильный ответ — «−1» очко.

   Для задачи типа б)

   * за правильный ответ абитуриент получал «+2» очка,
   * за отсутствие ответа — «0» очков,
   * за неправильный ответ — «−1» очко.

   Для задачи типа в)

   * за правильный ответ абитуриент получал «+2» очка,
   * в остальных случаях — «0» очков.

Число баллов за тест определялось суммой набранных при ответах на вопросы теста очков.

Оценка за экзамен равнялась сумме баллов, полученных за обе части экзамена.

Ниже приводятся два варианта экзамена, то есть два варианта части А с решениями и два варианта части Б с правильными ответами (которые выделены) и с соответствующими пояснениями.

3.1 Задачи, вариант 1

Задача 1. *(15 очков)* Найти область определения и построить график функции $f(x) = (x+1)\lim\limits_{n\to\infty}(\operatorname{arctg} x^n)$.

Задача 2. *(25 очков)* Найти (если существуют) точки наименьшего значения функции $f(x, y) = \max\{x^2 + y^2 - 5, 2x^2 - 3y^2 + 1\}$.

Задача 3. *(30 очков)* Функция $f(x)$ при $x \in (-\infty, +\infty)$ задана формулой

$$f(x) = \int_{2+x}^{1-x} e^{(2y-3)^2}[1 - y\operatorname{sign}(y-1)]\,dy.$$

Найти (если существуют) локальные максимумы и минимумы функции $f(x)$.

Замечание. По определению $\operatorname{sign} u = \begin{cases} 1, & \text{при } u > 0, \\ 0, & \text{при } u = 0, \\ -1, & \text{при } u < 0. \end{cases}$

Задача 4. *(30 очков)* Заданы две системы линейных однородных уравнений, матрицы которых зависят от параметров α, β: $A(\alpha, \beta)x = 0$ и $B(\alpha, \beta)x = 0$, где вектор $x \in \mathbf{R}^3$ и

$$A(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha^2 - 1 & 0 & \alpha^2 - 1 \\ \beta + 2 & \beta + 2 & 0 \\ 0 & \alpha - 1 & \alpha - 1 \end{pmatrix},$$

$$B(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha + \beta & \alpha - \beta + 2 & \beta - \alpha - 2 \\ 1 - \beta & \beta - 1 & \beta(\beta - 1) \\ 0 & 0 & \beta^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Найти значения пар (α, β), при которых множество решений этих систем уравнений являются ортогональными дополнениями друг к другу.

3.2 Задачи, вариант 2

Задача 1. *(15 очков)* Найти область определения и построить график функции $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}((x+1)\operatorname{arctg} x^n)$.

Задача 2. *(25 очков)* Найти (если существуют) точки наибольшего и наименьшего значений функции $f(x,y,z) = x + 2y + 3z$ при ограничении $x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 1$.

Задача 3. *(30 очков)* Функция $f(x)$ при $x \in (-\infty, +\infty)$ задана формулой

$$f(x) = \int_{x-1}^{1-x} e^{y^2}[2 + (1-y)\operatorname{sign}(1+y)]\,dy.$$

Найти (если существуют) локальные максимумы и минимумы функции $f(x)$.

Замечание. По определению $\operatorname{sign} u = \begin{cases} 1, & \text{при } u > 0, \\ 0, & \text{при } u = 0, \\ -1, & \text{при } u < 0. \end{cases}$

Задача 4. *(30 очков)* Найти все значения пар (α, β), при которых существует вещественная симметричная матрица A, имеющая характеристический многочлен

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 3\beta\lambda^2 - 3(\beta^2 - \beta + 1)\lambda + \beta(2\alpha - \beta),$$

и для которой векторы $x = (\alpha, 0, 2\alpha - \beta)$, $y = (\alpha, 2\alpha - \beta, 0)$, $z = (0, \alpha, \alpha)$ являются собственными. Для каждого решения привести пример матрицы A.

3.3 Тест, вариант 1

3.3.1 Группа 1: ответы «Да» или «Нет»

1. Может ли последовательность функций, не являющихся непрерывными, сходиться равномерно к непрерывной функции?

Да Нет

2. Функция определена и равномерно непрерывна на каждом из отрезков $[2,4]$ и $[5,7]$. Будет ли равномерно непрерывна на множестве $[2,4] \cup [5,7]$?

Да Нет

3. Известно, что $a_i > 0$ при $i = 1, 2, \ldots$ и $\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^n a_i = 0$, где $\prod_{i=1}^n a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \cdot \ldots \cdot a_n$. Верно ли, что $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$?

Да Нет

4. Является ли дифференцируемой в точке $x = 0$ функция $f(x) = |x| - |\sin x|$?

Да Нет

5. Является ли счетным множество решений (x, y) уравнения $\sin(xy) = 1$, где x и y — вещественные переменные ?

Да Нет

6. Система векторов $\tilde{a}_i = (a_{i1}, \ldots, a_{ik}, c_i)$, $i = 1, \ldots, m$, получается из линейно зависимой системы $a_i = (a_{i1}, \ldots, a_{ik})$, $i = 1, \ldots, m$, добавлением $(k+1)$-й компоненты c_i к каждому вектору a_i, $i = 1, \ldots, m$. Может ли система векторов $\tilde{a}_i$, $i = 1, \ldots, m$, оказаться линейно независимой ?

Да Нет

7. Функция $f(x)$ определена и выпукла на отрезке $[0, 2]$, причем $f(0) = 2$, $f(2) = -3$. Верно ли утверждение, что интеграл $\int_0^2 f(x)dx$ есть величина отрицательная ?

Да Нет

3.3.2 Группа 2: выбор ответа из нескольких вариантов

8. Известно, что некоторая подпоследовательность монотонной последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет конечный предел. Выберите правильное утверждение:

1) последовательность $\{a_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ сходится;

2) последовательность $\{a_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ может быть неограниченной;

3) ни одно из утверждений 1), 2) не следуют из условий, наложенных на последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

9. Дана система линейных уравнений $Ax = b$, где A — прямоугольная матрица. Выберите правильное утверждение:

1) если столбцы матрицы A линейно независимы, то система имеет решение при любом b;

2) если строки матрицы A линейно независимы, то система имеет решение при любом b;

3) если столбцы матрица A линейно зависимы, то система имеет бесконечно много решений при любом b.

10. Выберите правильное утверждение.

Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно на множестве M, если

1) для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $N > 0$ и $x \in M$, что если $n > N$, $m > N$, то $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$;

2) для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $N > 0$ и $\delta > 0$, что если $n > N$, $x \in M$, $y \in M$ и $|x - y| < \delta$, то $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$;

3) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N > 0$, что если $x \in M$, $n > N$, $m > N$, то $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

11. Функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой и обладает следующим свойством: для любого $\delta > 0$ и любой точки x_0 существует такое $\varepsilon > 0$, что если $|x - x_0| < \delta$, то $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Выберите правильное утверждение:

1) функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке x_0;

2) функция $f(x)$ ограничена на всей числовой прямой;

3) ни одно из утверждений 1), 2) не следует из условий, наложенных на функцию $f(x)$.

12. Известно, что $f(x)$ — определенная на всей числовой прямой неубывающая функция, а суперпозиция $\varphi(f(x))$ — строго возрастающая функция. Выберите правильное утверждение:

1) $\varphi(y)$ — строго возрастающая функция;

2) обе функции $f(x)$ и $\varphi(y)$ строго возрастают;

3) функция $f(x)$ — строго возрастающая;

4) ни одно из утверждений 1)—3) не следует из приведенных условий.

13. Элементы $n \times n$-матрицы $A = (a_{ij})$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$, $n > 1$, имеют вид $a_{ij} = \alpha_i \beta_j - 3\beta_j$, где $a_i \neq 3$, $b_j \neq 0$. Выберите правильное утверждение:

1) ранг матрицы A равен n;

2) ранг матрицы A равен 1;

3) ни одно из утверждений 1), 2) не следует из приведенных условий.

14. Пусть $F(x) = \varphi(x)f(x)$, где $f(x)$ непрерывна в точке x_0, а $\varphi(x)$ разрывна в точке x_0. Выберите правильное утверждение:

1) $F(x)$ непрерывна в точке x_0;

2) $F(x)$ разрывна в точке x_0;

3) ни одно из утверждений 1), 2) не следует из приведенных условий.

15. Функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[0, 2]$, принимает на этом отрезке только рациональные значения и $f(1) = 1/2$. Выберите правильное утверждение:

1) множество значений функции $f(x)$ счетно;

2) функция $f(x)$ дифференцируема на $(0, 2)$;

3) ни одно из утверждений 1), 2) не следует из условий, наложенных на функцию $f(x)$.

16. Дана система линейных уравнений $Ax = b$, где A — квадратная матрица, причем $\det A = 0$. Выберите правильное утверждение:

1) система несовместна при любом b;

2) система имеет бесконечное множество решений при любом b;

3) система либо имеет единственное решение, либо имеет бесконечное множество решений;

4) система либо несовместна, либо имеет бесконечное множество решений;

5) ни одно из утверждений 1)—4) не следует из приведенных условий.

3.3.3 Группа 3: ответ в свободной форме

17. Рассмотрим функцию $f(x) = \sin(1/x)$ при $x \in (0, 2/\pi)$ и обозначим через $M \subset \subset \mathbf{R}^2$ множество точек (x, y) ее графика. Опишите множество граничных точек множества M.

18. Пусть A — линейный оператор из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^n$, имеющий n различных собственных значений. Сколько различных инвариантных подпространств имеет оператор A?

19. Приведите пример функции, которая на интервале $(0, 1)$ имеет локальный максимум, но не имеет стационарных точек.

20. Пусть A — невырожденная квадратная матрица второго порядка, а матрица $A^2 + 2A$ — вырожденная и имеет собственное число -1. Какие собственные числа имеет матрица A?

3.4 Тест, вариант 2

3.4.1 Группа 1: ответы «Да» или «Нет»

1. Верно ли, что $f(x) = x - \sin x$ является строго монотонной функцией?

Да Нет

2. Система векторов $\tilde{a}_i = (a_{i1}, \ldots, a_{ik})$, $i = 1, \ldots, m$, получается из линейно независимой системы $a_i = (a_{i1}, \ldots, a_{ik}, c_i)$, $i = 1, \ldots, m$, отбрасыванием у каждого вектора последней, $(k+1)$-й, компоненты c_i. Может ли система векторов $\tilde{a}_i$, $i = 1, \ldots, m$, быть линейно зависимой?

Да Нет

3. Может ли интервал $(2, 9)$ быть образом отрезка $[2, 5]$ при непрерывном отображении?

Да Нет

4. Является ли счетным множество точек $\left(\sqrt{m/n}, \sqrt{mn}\right) \in \mathbf{R}^2$, где m и n — любые натуральные числа?

Да Нет

5. Является ли функция двух вещественных аргументов $f(x, y) = |x - y|^3$ дифференцируемой в точке $(x, y) = (0, 0)$?

Да Нет

6. Функция $f(x)$ определена и выпукла на $[-1, 1]$, причем $f(-1) = 1$, $f(1) = -1$. Верно ли утверждение, что интеграл $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ есть величина положительная?

Да Нет

7. Функция равномерно непрерывна на каждом из отрезков $[2, 4]$ и $[3, 7]$. Будет ли она равномерно непрерывна на отрезке $[2, 7]$?

Да Нет

8. Известно, что $a_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots$ и $\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} a_i^2 = 0$ где $\prod_{i=1}^{n} a_i^2 = a_1^2 \cdot a_2^2 \cdot \ldots \cdot a_n^2$. Следует ли отсюда, что $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$?

Да　　　　　　　　　　Нет

3.4.2 Группа 2: выбор ответа из нескольких вариантов

9. Функция $F(x)$ определена и непрерывна на $[-1, 1]$, принимает на этом отрезке только иррациональные значения и $F(-1) = F(1) = \sqrt{2}$. Выберите правильное утверждение:

1) множество значений функции $F(x)$ несчетно;
2) функция $F(x)$ имеет на интервале $(-1, 1)$ локальный экстремум;
3) ни одно из утверждений 1), 2) не следует из условий, наложенных на функцию $F(x)$.

10. Каждый элемент $n \times n$-матрицы A $(n > 1)$ имеет вид $a_{ij} = \gamma_i/\beta_j + \gamma_i\beta_j$, где $\gamma_i \neq 0$, $\beta_j \neq 0$. Выберите правильное утверждение:

1) ранг матрицы A равен n;
2) ранг матрицы A равен 1;
3) ни одно из утверждений 1), 2) не следует из условий, наложенных на матрицу A.

11. Пусть $F(x) = f(x) + \varphi(x)$, где $f(x)$ — непрерывная в точке x_0 функция, а функция $\varphi(x)$ разрывна в точке x_0. Выберите правильное утверждение:

1) функция $F(x)$ непрерывна в точке x_0;
2) функция $F(x)$ разрывна в точке x_0;
3) ни одно из утверждений 1), 2) не следует из приведенных условий.

12. Выберите правильный вариант определения. Функция называется равномерно непрерывной на множестве $M \subset \mathbf{R}$, если

1) для любого $\varepsilon > 0$ и для любого $x \in M$ найдется такое число $\delta > 0$, что если $y \in M$ и $|x - y| < \delta$, то $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$;
2) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что если $x \in M$, $y \in M$ и $|x - y| < \delta$, то $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$;

3) для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $x \in M$ и $\delta > 0$, что если $y \in M$ и $|x - y| < \delta$, то $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

13. Известно, что некоторая подпоследовательность монотонной последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет конечный предел. Выберите правильное утверждение:

1) последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится;

2) последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ может быть неограниченной;

3) ни одно из утверждений 1), 2) не следует из условий, наложенных на последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

14. Дана система линейных уравнений $Ax = b$, где A — прямоугольная матрица. Выберите правильное утверждение:

1) если столбцы матрицы A линейно независимы, то система имеет не более одного решения при любом b;

2) если строки матрицы A линейно независимы, то система имеет не более одного решения при любом b;

3) если строки матрицы A линейно зависимы, то система имеет бесконечно много решений при любом b.

15. Известно, что $f(x)$ — определенная на всей числовой прямой невозрастающая функция, а суперпозиция $\varphi(f(x))$ — строго убывающая функция. Выберите правильное утверждение:

1) $\varphi(y)$ — строго убывающая функция;

2) обе функции $f(x)$ и $\varphi(y)$ строго убывают;

3) ни одно из утверждений 1), 2) не следует из условий, наложенных на функции $f(x)$ и $\varphi(y)$.

16. Дана система линейных уравнений $Ax = b$, где A — квадратная матрица, причем $\det A = 0$. Выберите правильное утверждение:

1) существует вектор b, при котором система несовместна;

2) для любого вектора b множество решений системы бесконечно;

3) существует такой вектор b, что решение системы существует и единственно;

4) ни при какой правой части b система не имеет решения;

5) ни одно из утверждений 1)—4) не следует из приведенных условий.

3.4.3 Группа 3: ответ в свободной форме

17. Линейный оператор $A\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ имеет бесконечно много одномерных инвариантных подпространств. Какое максимальное число различных собственных значений может иметь оператор A?

18. Приведите пример функции, определенной на отрезке $[0,1]$, множество значений которой совпадает с интервалом $(0,1)$.

19. Пусть A — матрица второго порядка, имеющая два различных собственных числа. Какие собственные числа имеет матрица A, если известно, что $A^2 + A$ — нулевая матрица?

20. Рассмотрим множество $M \subset \mathbf{R}^2$, состоящее из точек (x, y), для которых $x \in \{1/n, n = 1, 2, \ldots\}$ и $y = \sin(\pi x/3)$. Опишите множество предельных точек множества M.

3.5 Решения задач, вариант 1

Решение задачи 1. 1. Заметим, что:

* если $x \leqslant -1$, то $\begin{cases} x^n \geqslant 1 \text{ и } \operatorname{arctg} x^n \geqslant \pi/4 \text{ при } n = 2k, \\ x^n \leqslant -1 \text{ и } \operatorname{arctg} x^n \leqslant -\pi/4 \text{ при } n = 2k-1, \end{cases}$ следовательно, $\lim_{n\to\infty}(\operatorname{arctg} x^n)$ не существует;
* если $|x| < 1$, то $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$, откуда $\lim_{n\to\infty}(\operatorname{arctg} x^n) = 0$;
* если $x = 1$, то $x^n = 1$, и $\lim_{n\to\infty}(\operatorname{arctg} x^n) = \pi/4$;
* если $x > 1$, то $\lim_{n\to\infty} x^n = +\infty$, откуда $\lim_{n\to\infty}(\operatorname{arctg} x^n) = \pi/2$.

2. Из п. 1 и определения $f(x)$ получаем, что

$$f(x) = \begin{cases} \text{не определена} & \text{при } x \leqslant -1, \\ 0, & \text{при } -1 < x < 1, \\ \pi/2, & \text{при } x = 1, \\ (x+1)\pi/2, & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Таким образом, областью определения $f(x)$ является интервал $(-1, +\infty)$. Ее график изображен на рисунке 1.

Решение задачи 2. 1. Так как $x^2 + y^2 - 5 \geqslant -5$, то $f(x, y) \geqslant -5$ при любых $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Поэтому существует $m = \inf\{f(x, y), (x, y) \in \mathbf{R}^2\}$. Далее, поскольку $f(0, 0) = 1$, а

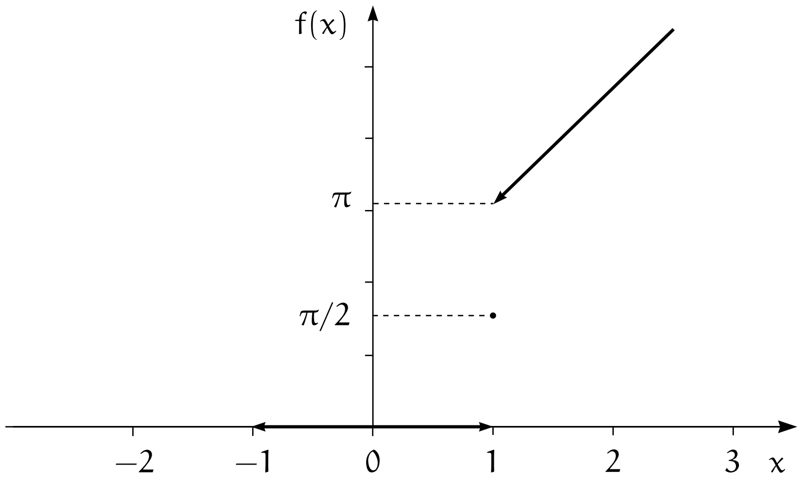

Рис. 1. График функции $f(x)$

$x^2 + y^2 - 5 > 1$ при $x^2 + y^2 > 6$, то $m = \inf\{f(x, y), x^2 + y^2 \leqslant 6\}$. Функция $f(x, y)$ непрерывна как максимум двух непрерывных функций, а круг $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant \leqslant 6\}$ есть компактное множество. Следовательно, $f(x, y)$ имеет точку наименьшего значения.

2. Пусть (x_0, y_0) — искомая точка. Обозначим $g(x, y) = x^2 + y^2 - 5$, $h(x, y) = 2x^2 - - 3y^2 + 1$.

Рассмотрим три возможных случая.

а) $g(x_0, y_0) > h(x_0, y_0)$. Тогда $f(x, y) = g(x, y)$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0). Значит, (x_0, y_0) — точка локального минимума функции $g(x, y)$ и $\partial g/\partial x(x_0, y_0) = \partial g/\partial y(x_0, y_0) = 0$, то есть $x_0 = y_0 = 0$. Но $g(0, 0) = -5 < h(0, 0) = 1$. Следовательно, случай а) невозможен.

б) $g(x_0, y_0) < h(x_0, y_0)$. Тогда $f(x, y) = h(x, y)$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) и $\partial h/\partial x(x_0, y_0) = \partial h/\partial y(x_0, y_0) = 0$, то есть $x_0 = y_0 = 0$. Но точка $(0, 0)$ не является точкой минимума функции h, поскольку матрица вторых производных функции $h(x, y)$ в точке $(0, 0)$ не является неотрицательно определенной. (Тот факт, что точка $(0, 0)$ не является точкой минимума функции h, почти очевиден: в окрестности этой точки функция h возрастает по x и убывает по y.) Значит, случай б) также невозможен.

в) $g(x_0, y_0) = h(x_0, y_0)$. Тогда точка (x_0, y_0) — это точка минимума функции $g(x, y) = x^2 + y^2 - 5$ при ограничении $h(x, y) - g(x, y) = x^2 - 4y^2 + 6 = 0$. Составим функцию Лагранжа $L(x, y, \lambda) = x^2 + y2 - 5 - \lambda(x^2 - 4y^2 + 6)$ и напишем необходимое условие минимума:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - 2\lambda x = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 2y + 8\lambda y = 0, \quad x^2 - 4y^2 + 6 = 0.$$

Отсюда $x(1 - \lambda) = 0$, $y(1 + 4\lambda) = 0$, $x^2 - 4y^2 + 6 = 0$.

Если $\lambda = 1$, то $y = 0$ и $x^2 + 6 = 0$, что невозможно.

Если $\lambda \neq 1$, то $x = 0$ и $y^2 = 3/2$, т. е. точки $(0, \sqrt{3/2})$ и $(0, -\sqrt{3/2})$ удовлетворяют необходимому условию минимума. Поскольку значения функции $f(x, y)$ в обеих точках одинаковы, то найденные две точки — искомые.

Ответ. Минимум $f(x, y)$ достигается в точках $(0, \sqrt{3/2})$, $(0, -\sqrt{3/2})$.

Решение задачи 3. Обозначим через $\varphi(y)$ подынтегральное выражение. Функция $\varphi(y)$ непрерывна везде, кроме точки $y = 1$, в которой она терпит разрыв первого рода. Поэтому существует непрерывная первообразная $\Phi(y)$, дифференцируемая при $y \neq 1$. При этом $\Phi'(y) = \varphi(y)$, если $y \neq 1$, а в точке $y = 1$ у функции $\Phi(y)$ производной (двусторонней) нет. Так как $f(x) = \Phi(1 - x) - \Phi(2 + x)$, то функция $f(x)$ также дифференцируема в точках x, для которых $1 - x \neq 1$ и $2 + x \neq 1$, то есть при $x \neq 0$ и $x \neq -1$.

Следовательно, подозрительными на экстремум являются точки $x = 0$ и $x = -1$, а также те точки интервалов $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, +\infty)$, в которых $f'(x) = 0$.

По правилу дифференцирования сложной функции $f'(x) = -\Phi'(1 - x) - \Phi'(2 + {} + x) = -\varphi(1 - x) - \varphi(2 + x)$, то есть $f'(x) = e^{(2x+1)^2}[(1 - x)\,\mathrm{sign}(-x) + (2 + x)\,\mathrm{sign}(1 + x) - 2]$. Рассмотрим все возможные случаи.

Если $x \in (-\infty, -1)$, то $\mathrm{sign}(-x) = 1$, $\mathrm{sign}(1 + x) = -1$ и, следовательно, $f'(x) = {} = -e^{(2x+1)^2}[3 + 2x]$. Отсюда $f'(-3/2) = 0$, $f'(x) > 0$ при $x \in (-\infty, -3/2)$ и $f'(x) < 0$ при $x \in (-3/2, -1)$. Поэтому точка $x = -3/2$ является точкой локального максимума.

Если $x \in (-1, 0)$, то $\mathrm{sign}(-x) = \mathrm{sign}(1 + x) = 1$, так что $f'(x) = e^{(2x+1)^2} > 0$ при этих x. На интервале $(-1, 0)$ точек экстремума нет, однако точка $x = -1$ является точкой локального минимума, так как функция $f(x)$ слева от $x = -1$ убывает, а справа — возрастает.

Если $x \in (0, +\infty)$, то $\mathrm{sign}(-x) = -1$, $\mathrm{sign}(1 + x) = 1$, и $f'(x) = e^{(2x+1)^2}(2x - 1)$. Видим, что $f'(1/2) = 0$, $f'(x) < 0$ при $x \in (0, 1/2)$ и $f'(x) > 0$ при $x \in (1/2, +\infty)$. Точка $x = 1/2$ является точкой локального минимума. Одновременно устанавливаем, что точка $x = 0$ является точкой локального максимума, поскольку $f(x)$ возрастает слева и убывает справа от нее.

Ответ. Функция имеет локальные максимумы при $x = -3/2$ и $x = 0$ и локальные минимумы при $x = -1$ и $x = 1/2$.

Решение задачи 4. Множество решений каждой линейной однородной системы — это в точности ортогональное дополнение к линейной оболочке строк ее матрицы. Поэтому требуется определить те значения параметров α и β , при которых линейная оболочка строк одной из матриц, скажем $A(\alpha, \beta)$, являлась бы множеством решений второй системы, т. е. $B(\alpha,\beta)x = 0$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{rank} A(\alpha,\beta) + \operatorname{rank} B(\alpha,\beta) = 3$ и каждая строка матрицы $A(\alpha,\beta)$ была решением системы $B(\alpha,\beta)x = 0$, то есть

$$\begin{cases} 2(\alpha^2-1)(\beta-1) = 0, \\ (\alpha^2-1)(\beta-1)^2 = 0, \\ (\alpha^2-1)(\beta^2-1) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2(\beta+2)(\alpha+1) = 0, \\ 0 = 0, \\ 0 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = 0, \\ (\alpha-1)(\beta^2-1) = 0, \\ (\alpha-1)(\beta^2-1) = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим уравнение $2(\beta+2)(\alpha+1) = 0$.

Если $\beta = -2$, то единственное значение $\alpha = 1$. При этом

$$A(1,-2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(1,-2) = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -5 \\ 3 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$\operatorname{rank} A = 0$, $\operatorname{rank} B = 3$, т. е. пара $(\alpha,\beta) = (1,-2)$ является решением задачи.

Если $\beta \neq -2$, то $\alpha = -1$. При этом должно быть $\beta^2 = 1$, т. е. $\beta = +1$ или $\beta = -1$.

Если $(\alpha,\beta) = (-1,1)$, то

$$A(-1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B(-1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\operatorname{rank} A = 2$, $\operatorname{rank} B = 0$, и пара $(\alpha,\beta) = (-1,1)$ не подходит.

Если $(\alpha,\beta) = (-1,-1)$, то

$$A(-1,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B(-1,-1) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\operatorname{rank} A = 2$, $\operatorname{rank} B = 1$, и пара $(\alpha,\beta) = (-1,-1)$ является решением задачи.

Ответ. $(\alpha,\beta) = (1,-2)$ и $(\alpha,\beta) = (-1,-1)$.

3.6 Решения задач, вариант 2

Решение задачи 1. 1. Заметим, что:

* если $x < -1$, то $\begin{cases} x^n \geqslant 1 \text{ и } \operatorname{arctg} x^n \geqslant \pi/4 \text{ при } n = 2k, \\ x^n \leqslant -1 \text{ и } \operatorname{arctg} x^n \leqslant -\pi/4 \text{ при } n = 2k-1, \end{cases}$ следовательно, $\lim_{n\to\infty}(\operatorname{arctg} x^n)$ и $\lim_{n\to\infty}((x+1)\operatorname{arctg} x^n)$ не существуют;

* если $x = 1$, то $(x+1)\operatorname{arctg} x^n = 0$, откуда $\lim_{n\to\infty}((x+1)\operatorname{arctg} x^n) = 0$;

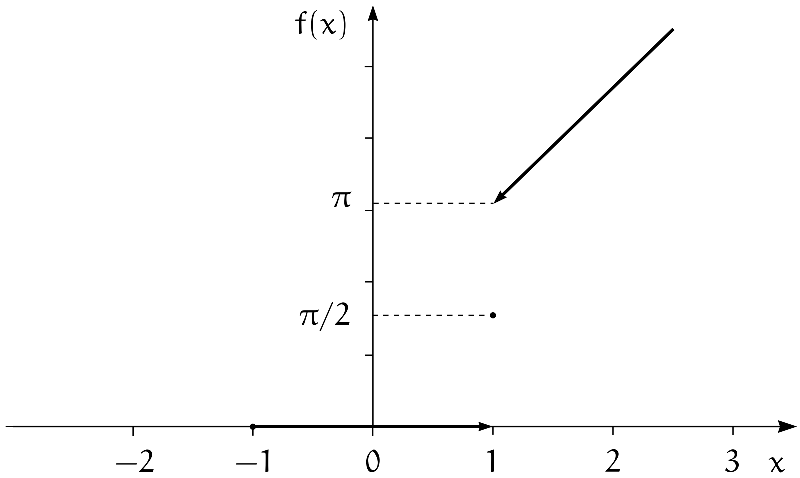

Рис. 2. График функции $f(x)$

* если $|x| < 1$, то $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$, откуда $\lim_{n\to\infty}(\operatorname{arctg} x^n) = 0$;
* если $x = 1$, то $x^n = 1$, и $\lim_{n\to\infty}((x+1)\operatorname{arctg} x^n) = 2\operatorname{arctg} 1 = \pi/2$;
* если $x > 1$, то $\lim_{n\to\infty} x^n = +\infty$, откуда $\lim_{n\to\infty}((x+1)\operatorname{arctg} x^n) = (x+1)\pi/2$.

2. Из п. 1 и определения $f(x)$ получаем, что

$$f(x) = \begin{cases} \text{не определена} & \text{при } x < -1, \\ 0, & \text{при } -1 \leqslant x < 1, \\ \pi/2, & \text{при } x = 1, \\ (x+1)\pi/2, & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Таким образом, область определения $f(x)$ есть полуинтервал $[-1, +\infty)$. Ее график изображен на рисунке 2.

Решение задачи 2. 1. Обозначим $M = \{(x, y, z) : x^2+y^2 \leqslant z \leqslant 1\}$. Очевидно, что множество M непусто и для любой точки $(x, y, z) \in M$ выполнены неравенства $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$, т. е. множество M ограничено. Поскольку неравенства, определяющие M, нестрогие, то множество M замкнуто. Функция $f(x, y, z)$ непрерывна, поэтому она достигает на M наибольшего и наименьшего значений.

2. Пусть $u_0 = (x_0, y_0, z_0)$ — искомая точка. Для этой точки ограничения задачи могут выполняться либо как строгие неравенства, либо как равенства. Рассмотрим все возможные случаи.

а) $x_0^2+y_0^2 < z_0$, $z_0 < 1$. Это означает, что u_0 – внутренняя точка M. Но поскольку $\partial f/\partial x = 1 \neq 0$, $\partial f/\partial y = 2 \neq 0$, $\partial f/\partial z = 3 \neq 0$, то u_0 не может быть точкой локального экстремума. Следовательно, случай а) невозможен.

б) $x_0^2 + y_0^2 = z_0$, $z_0 < 1$. Тогда u_0 есть точка локального экстремума функции f при ограничении $x^2 + y^2 = z$.

Составим функцию Лагранжа: $L(x, y, z, \lambda) = x + 2y + 3z - \lambda(x^2 + y^2 - z)$ и запишем необходимые условия экстремума:

$$\begin{cases} \partial L/\partial x = 1 - 2\lambda x = 0, \\ \partial L/\partial y = 2 - 2\lambda y = 0, \\ \partial L/\partial z = 3 + \lambda = 0, \\ z = x^2 + y^2. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda = -3, \\ x = 1/2\lambda = -1/6, \\ y = 1/\lambda = -1/3, \\ z = 1/36 + 1/9 = 5/36 < 1. \end{cases}$$

Таким образом, точка $u_1 = (-1/6, -1/3, 5/36)$ является подозрительной на экстремум.

в) $x_0^2 + y_0^2 < z_0$, $z_0 = 1$. Тогда (x_0, y_0) является точкой локального экстремума функции $x + 2y + 3$ при ограничении $x^2 + y^2 < 1$. Аналогично п. а) получаем, что этого не может быть.

г) $x_0^2 + y_0^2 = z_0$, $z_0 = 1$. Тогда (x_0, y_0) является точкой локального экстремума функции $x+2y+3$ при ограничении $x^2+y^2 = 1$. Аналогично п. б) составим функцию Лагранжа: $L(x, y, \lambda) = x + 2y + 3 - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ и запишем необходимые условия экстремума:

$$\begin{cases} \partial L/\partial x = 1 - 2\lambda x = 0, \\ \partial L/\partial y = 2 - 2\lambda y = 0, \\ 1 = x^2 + y^2. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = 2x, \\ 5x^2 = 1. \end{cases}$$

Получаем еще две точки, подозрительные на экстремум: $u_2 = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}, 1)$, $u_3 =$ $= (-1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5}, 1)$.

3. Таким образом, получены точки u_1, u_2, u_3, подозрительные на экстремум. При этом $f(u_1) = -5/12$, $f(u_2) = 3 + \sqrt{5}$, $f(u_3) = 3 - \sqrt{5}$. Очевидно, $f(u_2) > f(u_3) > 0 >$ $> f(u_1)$.

Ответ. Точкой наименьшего значения является точка $u_1 = (-1/6, -1/3, 5/36)$, а точкой наибольшего значения — точка $u_2 = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}, 1)$.

Решение задачи 3. Обозначим через $\varphi(y)$ подынтегральное выражение. Функция $\varphi(y)$ непрерывна везде, кроме точки $y = -1$, в которой она терпит разрыв первого рода. Поэтому существует непрерывная первообразная $\Phi(y)$, дифференцируемая при $y \neq -1$. При этом $\Phi'(y) = \varphi(y)$, если $y \neq -1$, а в точке $y = -1$ у функции $\Phi(y)$ производной (двусторонней) нет. Так как $f(x) = \Phi(1 - x) - \Phi(x - 1)$, то функция $f(x)$ также дифференцируема в точках x, для которых $1 - x \neq -1$ и $x - 1 \neq -1$, то есть при $x \neq 2$ и $x \neq 0$.

Следовательно, подозрительными на экстремум являются точки $x = 0$ и $x = 2$, а также те точки x интервалов $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$, $(2, +\infty)$, в которых $f'(x) = 0$. По правилу дифференцирования сложной функции $f'(x) = -\Phi(1-x) - \Phi(x-1)$, то есть $f'(x) = e^{(x-1)^2}[(x-2)\operatorname{sign}(x) - x\operatorname{sign}(2-x) - 4]$.

Рассмотрим все возможные случаи. Если $x \in (-\infty, 0)$, то $\operatorname{sign}(x) = -1$, $\operatorname{sign}(2-x) = 1$, и, следовательно, $f'(x) = -2e^{(x-1)^2}(x+1)$. Таким образом, $f'(-1) = 0$, $f'(x) > 0$ при $x \in (-\infty, -1)$ и $f'(x) < 0$ при $x \in (-1, 0)$. Точка $x = -1$ является точкой локального максимума.

Если $x \in (0, 2)$, то $\operatorname{sign}(x) = \operatorname{sign}(2-x) = 1$, так что $f'(x) = -6e^{(x-1)^2} < 0$. На интервале $(0, 2)$ точек экстремума нет. Точка $x = 0$ также не является точкой экстремума, поскольку функция $f(x)$ убывает как слева, так и справа от нее.

Если $x \in (2, +\infty)$, то $\operatorname{sign}(x) = 1$, $\operatorname{sign}(2-x) = -1$, и $f'(x) = 2e^{(x-1)^2}(x-3)$. Видим, что $f'(3) = 0$, $f'(x) < 0$ при $x \in (2, 3)$ и $f'(x) > 0$ при $x \in (3, +\infty)$. Точка $x = 3$ является точкой локального минимума. Подозрительная точка $x = 2$ снова не является точкой экстремума, поскольку $f(x)$ убывает по обе стороны от нее.

Ответ. Функция имеет локальный максимум при $x = -1$ и локальный минимум при $x = 3$.

Решение задачи 4. Поскольку собственный вектор z не может быть нулевым, то допустимы лишь значения $\alpha \neq 0$. Рассмотрим два взаимоисключающих случая: $2\alpha - \beta \neq 0$ и $2\alpha - \beta = 0$.

1) Если $2\alpha - \beta \neq 0$, то собственные векторы x, y, z линейно независимы и попарно не ортогональны. Поскольку матрица A симметрична, то они должны соответствовать одному и тому же собственному числу кратности 3, и

$$p(\lambda) = -(\lambda - \lambda_0)^3 = -\lambda^3 + 3\lambda_0\lambda^2 - 3\lambda_0^2\lambda - \lambda_0^3,$$

т. е. $\lambda_0 = \beta$, $3\lambda_0^2 = 3(\beta^2 - \beta + 1)$ и $\lambda_0^3 = \beta(2\alpha - \beta)$. Отсюда находим, что $\lambda_0 = \beta = 1$ и $\alpha = 1$. Единственной симметричной матрицей, имеющей собственное число 1, кратность которого совпадает с порядком матрицы, является единичная матрица.

2) Если $2\alpha - \beta = 0$, то характеристический многочлен принимает вид

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 3\beta\lambda^2 - 3(\beta^2 - \beta + 1)\lambda,$$

и его корнями являются $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = (3\beta \pm \sqrt{-3(\beta-2)^2})/2$. Так как у вещественной симметричной матрицы собственные числа вещественные, то единственным возможным значением является $\beta = 2$, и, следовательно, $\alpha = 1$. При этом собственное число 0 имеет кратность 1, а собственное число 3 — кратность 2. Полагая, что собственному числу 0 соответствует собственный вектор $x = y = (1, 0, 0)$, а собственный вектор $z = (0, 1, 1)$ соответствует собственному числу 3, то в качестве матрицы A получаем матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ. Решения — две пары значений параметров: $(\alpha, \beta) = (1, 1)$, $(\alpha, \beta) = (1, 2)$. В качестве соответствующих им матриц можно взять, например,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3.7 Ответы на тест, вариант 1

1. Да, Пример: $f_n(x) = \begin{cases} 1/n, & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ -1/n, & \text{при } -1 \leqslant x < 0. \end{cases}$ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ равномерно на $[-1, 1]$.

2. Да, Следует непосредственно из определения.

3. Нет, Пример: $a_n = 1/2$, $n = 1, 2, \ldots$.

4. Да, Из формулы Тейлора $f(x) = \frac{|x|^3}{6} + o(x^3)$ при $x \to 0$, и, следовательно, $f'(0) = 0$.

5. Нет, Множество решений содержит пары (x, y), для которых $xy = \pi/2$. Это множество пар несчетно (имеет мощность континуума).

6. Да, Пример: $a_1 = (0)$, $a_2 = (1)$ линейно зависимы, $\widetilde{a}_1 = (0, 1)$, $\widetilde{a}_2 = (1, 1)$ линейно независимы.

7. Да, Функция $f(x)$ в силу выпуклости не превосходит линейной функции, график которой проходит через точки $(0, 2)$ и $(2, -3)$, а интеграл от нее отрицателен.

8. 1, Из условий, наложенных на последовательность, следует, что сама последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится.

9. 2, Если строки матрицы A линейно независимы, то A имеет максимальный ранг, и в силу теоремы Кронекера—Капелли система имеет решение при любой правой части.

10. 3, Следует из критерия Коши равномерной сходимости функциональной последовательности.

11. 3, Из условий лишь следует, что функция $f(x)$ ограничена на любом ограниченном множестве. Контрпример к 1) — функция Дирихле при $\varepsilon > 1$, контрпример к 2) — $f(x) = x$.

12. 3, Если $f(x)$, будучи неубывающей, не является строго возрастающей, то найдутся две точки $x_1 \neq x_2$, такие что $f(x_1) = f(x_2)$ и $\varphi(f(x_1)) = \varphi(f(x_2))$, что противоречит условиям. Контрпример к 1) и 2) — $f(x) = e^x$, $\varphi(x) = y^2$.

13. 2, Имеем $a_{ij} = (\alpha_i - 3)\beta_j$, т. е. все строки (и столбцы) матрицы A пропорциональны, откуда $\operatorname{rank} A \leqslant 1$, а так как матрица A ненулевая, то $\operatorname{rank} A = 1$.

14. 3, Рассмотреть два примера: $f(x) \equiv 1$ и $f(x) \equiv 0$.

15. 2, Из теоремы Коши о промежуточных значениях непрерывной функции следует, что $f(x)$ постоянна на $[0, 2]$.

16. 4, Система совместна при $b = 0$, причем однородная система имеет бесконечное множество решений. Линейная оболочка столбцов матрицы A не совпадает со всем пространством, так что система разрешима не при любом b.

17. Множество граничных точек — объединение графика M, точки $(2/\pi, 1)$ и отрезка $[-1, 1]$ оси Oy.

18. Количество различных инвариантных подпространств равно 2^n. Оно совпадает с числом всех подмножеств множества из n элементов.

19. Пример: $f(x) = -|x - 1/2|$.

20. Так как матрицы $A^2 + 2A = A(A + 2I)$ и $A^2 + 2A + I = (A + I)^2$ — вырожденные, то $A + 2I$ и $A + I$ — тоже вырожденные, где I — единичная матрица. Таким образом, матрица A имеет собственные числа -2 и -1. Можно проверить, что матрица $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ удовлетворяет условию задачи.

3.8 Ответы на тест, вариант 2

1. Да, Имеем $f'(x) = 1 - \cos x \geqslant 0$ и $f'(x) = 0$ только в изолированных точках, поэтому функция строго возрастает.

2. Да, Пример: $a_1 = (0, 1)$, $a_2 = (1, 1)$ линейно независимы, $\tilde{a}_1 = (0)$, $\tilde{a}_2 = (1)$ линейно зависимы.

3. Нет, По теореме Вейерштрасса числа 2 и 9 должны принадлежать образу непрерывного отображения.

4. Да, Элементы этого множества находятся во взаимно однозначном соответствии с парами (m, n) натуральных чисел.

5. Да, Функция $f(x, y)$ является суперпозицией $g(h(x, y))$ дифференцируемых функций $h(x, y) = x - y$ и $g(z) = |z|^3$.

6. Нет, Функция $f(x)$ в силу выпуклости не превосходит линейной функции, проходящей через точки $(-1, 1)$ и $(1, -1)$, интеграл от которой равен нулю.

7. Да, Сразу следует из определения равномерной непрерывности.

8. Нет, Пример: $a_n = 1/2$, $n = 1, 2, \ldots$.

9. 2, Из теоремы Коши о промежуточных значениях непрерывной функции следует, что $F(x)$ постоянна на $[-1, 1]$.

10. 2, Имеем $a_{ij} = \gamma_i(1/\beta_j + \beta_j)$, т. е. все строки (и столбцы) матрицы A пропорциональны, откуда $\operatorname{rank} A \leqslant 1$, а так как матрица A ненулевая, то $\operatorname{rank} A = 1$.

11. 2, Имеем $\varphi(x) = F(x) - f(x)$, поэтому если бы $F(x)$ была непрерывна в точке x_0, то и $\varphi(x)$ была бы непрерывна точке x_0.

12. 2, См. определение равномерной непрерывности функции.

13. 1, Так как последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна и имеет предельную точку, то она сходится.

14. 1, Если система имеет решение при некотором b, то b есть линейная комбинация столбцов матрицы A и в силу линейной независимости столбцов такое разложение единственно. Контрпример к 2): $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ — строки линейно независимы, а решений бесконечно много. Контрпример к 3): $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$ — строки линейно зависимы, а решений нет.

15. 3, Контрпример к 1) и 2) — $f(x) = e^{-x}$, $\varphi(y) = y^2$.

16. 1, Из условия $\det A = 0$ следует, что образ $\operatorname{Im} A$ не совпадает со всем пространством, поэтому для $b \notin \operatorname{Im} A$ система несовместна. Кроме того, однородная система (при $b = 0$) имеет бесконечно много решений, поэтому если решение системы при каком-нибудь b существует, то оно обязательно не единственно.

17. Количество различных собственных значений, очевидно, не превышает n и в то же время не может быть равным n, поскольку тогда число всех (а не только одномерных) инвариантных подпространств конечно. Таким образом, максимальное число различных собственных значений не превышает $n - 1$. Пример оператора, имеющего ровно $n-1$ различных собственных значений $Ae_1 = 0$, $Ae_2 = 0$, $Ae_i = ie_i$, $i = 3, \ldots, n$.

18. Например, $f(x) = x$ при $0 < x < 1$, $f(0) = f(1) = 1/2$.

19. Пусть λ — собственное число матрицы A, тогда $\lambda^2 + \lambda = 0$ т. е. $\lambda = 0$ или $\lambda = -1$. Можно проверить, что матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ удовлетворяет условию задачи и имеет собственные значения 0 и -1.

20. Легко проверить, что точка $(0, 0)$ является предельной. Других предельных точек нет: любая точка множества M является изолированной, и любая точка, не принадлежащая M и не совпадающая с $(0, 0)$, удалена на положительное расстояние от M.

4 Вступительный экзамен 2001 г.

Письменный экзамен в 2001 г. состоял из решения трех задач по математическому анализу и линейной алгебре и ответов на тестовые вопросы, требующие ответа «да» или «нет». Продолжительность экзамена 4 часа, максимальная оценка 12 баллов.

Правила оценивания экзамена были следующие: Для каждой задачи указывалось максимальное число очков, которое можно получить за ее решение. Правильные ответы на тестовые вопросы оценивались в одно очко, неправильные — в минус одно очко, отсутствие ответа — ноль очков.

Число баллов за экзамен определялось суммой очков, набранных при решении задач и ответах на тестовые вопросы.

4.1 Задачи

Задача 1. *(10 очков)* На плоскости xOy задана фигура F, состоящая из двух полукругов радиуса 1 с центрами в точках $(2, 1)$ и $(5, 1)$ (см. рисунок 3).

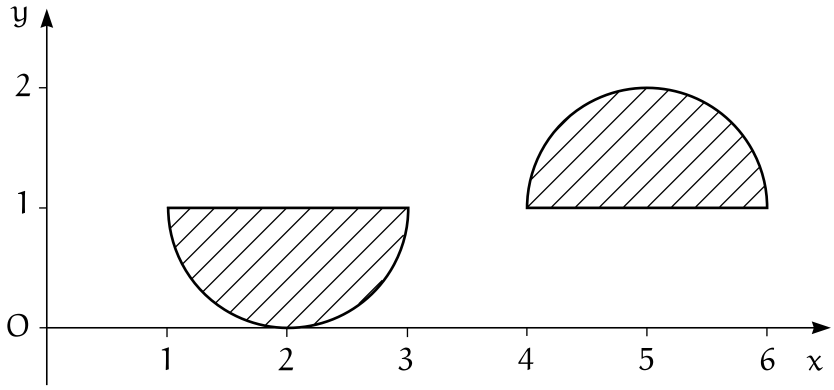

Рис. 3. Фигура F

Функция $f(t)$ определена следующим образом:

$$f(t) = \{\text{площадь пересечения фигуры } F \text{ с полуплоскостью } x \leqslant t\}.$$

Исследовать функцию $f(t)$, построить ее график и график ее производной.

Задача 2. *(15 очков)* Найти область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^n - x^{2n})$. Исследовать равномерную сходимость этого ряда на отрезке $[0, 1]$.

Задача 3. *(20 очков)* Пусть A — ортогональная, а I — единичная матрицы нечетного порядка n, причем матрица $I + A$ невырождена. Найти собственные числа

блочной матрицы
$$B = \begin{pmatrix} A & I \\ I & A \end{pmatrix}$$
порядка $2n$.

4.2 Тестовые вопросы

1. Числовая последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет конечный предел. Из этого следует, что

а) при любом натуральном k последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $b_n = \dfrac{1}{k+1}\sum\limits_{i=n}^{n+k} a_i$, сходится;

Да Нет

б) последовательность $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$, где $b_k = a_{2k}^* + a_{2k+1}^*$ и $\{a_k^*\}_{k=1}^{\infty}$ получена из $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ некоторой перестановкой членов, сходится;

Да Нет

в) последовательность $\{\sqrt[2n+1]{|a_n|}\}_{n=1}^{\infty}$ сходится;

Да Нет

г) если последовательность $\{a_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна, то и последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна;

Да Нет

д) последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $b_n = (-1)^n a_n a_{2n} a_{3n}$, сходится.

Да Нет

2. Функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Из этого следует, что

а) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая кусочно-линейная функция $\varphi(x)$, что $f(x) < \varphi(x) < f(x) + \varepsilon$ для всех $x \in [a, b]$;

Да Нет

б) каковы бы ни были пять точек $x_1, \ldots, x_5 \in [a, b]$, найдется такое $y \in [a, b]$, что $f(y) = \dfrac{1}{5}\sum\limits_{i=1}^{5} f(x_i)$;

Да Нет

в) если $f(x)$ дифференцируема на (a, b) и $f(a) \cdot f(b) = 0$, то найдется такое $\xi \in [a, b]$, что $f'(\xi) = 0$;

Да Нет

г) множество всех точек x из $[a, b]$, таких что $f(x) \geqslant \dfrac{f(a) + f(b)}{2}$, есть отрезок;

Да Нет

д) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta \in (0, \varepsilon)$, что если $x_1, x_2 \in [a, b]$ и $|x_1 - x_2| < \delta$, то $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$;

Да Нет

3. Пусть M — непустое множество в $\mathbf{R}^k$, не совпадающее с $\mathbf{R}^k$. Из этого следует, что

а) множество M имеет хотя бы одну предельную точку;

Да Нет

б) множество граничных точек M непусто;

Да Нет

в) множество внутренних то чек M непусто;

Да Нет

г) любая предельная точка множества M является его граничной точкой;

Да Нет

д) любая граничная точка множества M является его предельной точкой.

Да Нет

4. Числовая функция $f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b). Из этого следует, что

а) функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a, b]$;

Да Нет

б) функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$;

Да Нет

в) функция $f(x)$ непрерывна в каждой внутренней точке отрезка $[a, b]$;

Да Нет

г) если у функции $f(x)$ существуют односторонние производные в точках a и b, то $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$;

Да Нет

д) если у функции $f(x)$ существуют односторонние производные в точках a и b, то $f(x)$ достигает максимума на отрезке $[a, b]$, и производная в точках максимума равна нулю.

Да Нет

5. Известно, что точка a является предельной для каждого из множеств A и B в $\mathbf{R}^2$. Из этого следует, что

а) точка a является граничной для A и для B;

Да Нет

б) точка a принадлежит пересечению замыканий A и B;

Да Нет

в) точка a является предельной для пересечения множеств A и B;

Да Нет

г) точка a является предельной для объединения множеств A и B.

Да Нет

6. В векторном пространстве V заданы две системы векторов $\{x_1, \dots, x_n\}$ и $\{y_1, \dots, y_m\}$. Обозначим через $\mathscr{L}(x_1, \dots, x_n)$ и $\mathscr{L}(y_1, \dots, y_m)$ линейные оболочки систем векторов. Пусть система $\{x_1, \dots, x_n\}$ линейно независимая. Из этого следует, что

а) если $\mathscr{L}(x_1, \dots, x_n) \subset \mathscr{L}(y_1, \dots, y_m)$, то $m \geqslant n$;

Да Нет

б) если $n > m$, то $\mathscr{L}(y_1, \dots, y_m) \subset \mathscr{L}(x_1, \dots, x_n)$;

Да Нет

в) если $n = m$ и система $\{y_1, \dots, y_m\}$ линейно зависимая, то $\mathscr{L}(x_1, \dots, x_n) \subset \subset \mathscr{L}(y_1, \dots, y_m)$;

Да Нет

г) если $\mathscr{L}(x_1, \dots, x_n) \subset \mathscr{L}(y_1, \dots, y_m)$ и система $\{y_1, \dots, y_m\}$ линейно зависимая, то $m \neq n$;

Да Нет

д) если $\mathscr{L}(x_1, \dots, x_n) = \mathscr{L}(y_1, \dots, y_m)$ и $m \neq n$, то система $\{y_1, \dots, y_m\}$ линейно зависимая.

Да Нет

7. Известно, что произведение двух матриц BC является квадратной невырожденной матрицей. Из этого следует, что

а) обе матрицы B и C квадратные и невырожденные;

Да Нет

б) матрица CB является квадратной и невырожденной;

Да Нет

в) строки матрицы B линейно независимы;

Да Нет

г) столбцы матрицы B линейно независимы;

Да Нет

д) система $Cx = b$ имеет решение при любой правой части b;

Да Нет

е) система $Cx = b$ при любой правой части b имеет не более одного решения.

Да Нет

8. Пусть A и B — матрицы размера $m \times n$ и матрица $A^T B$ — симметричная положительно определенная (A^T — транспонированная к A матрица). Из этого следует, что

а) $n \geqslant m$;

Да Нет

б) A и B имеют одинаковый ранг;

Да Нет

в) матрица BA^T имеет ранг m;

Да Нет

г) матрица BA^T имеет m линейно независимых собственных векторов;

Да Нет

д) матрица BA^T невырождена.

Да Нет

9. Известно, что $A + A^2 = 0$, где A — квадратная матрица порядка $n \geqslant 1$. Из этого следует, что

а) A — проектор;

Да Нет

б) пространство $\mathbf{R}^n$ разлагается в прямую сумму ядра и образа матрицы A;

Да Нет

в) $A = 0$ или $A = -I$;

Да Нет

г) число 0 и число 1 оба являются собственными числами матрицы A;

Да Нет

д) если $\lambda = 0$ не является собственным числом матрицы A, то существует $z \neq 0$, такой что $Az + z = 0$.

Да Нет

4.3 Решения задач

Решение задачи 1. Рассмотрим функцию $g(t)$, определенную следующим образом:

$$g(t) = \{\text{длина отрезка пересечения фигуры } F \text{ и прямой } x = t\} =$$
$$= \begin{cases} \sqrt{1-(t-2)^2}, & \text{при } 1 \leqslant t \leqslant 3, \\ \sqrt{1-(t-5)^2}, & \text{при } 4 \leqslant t \leqslant 6, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{1}$$

График функции $g(t)$ имеет вид (см. рис. 4)

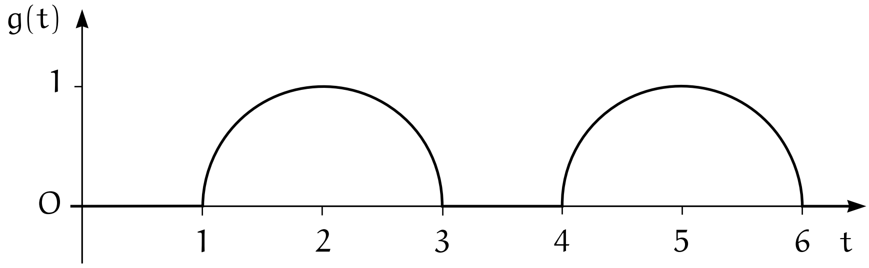

Рис. 4. График функции $g(t)$

При таком выборе $g(t)$ функция $f(t)$ равна

$$f(t) = \int_{-\infty}^{t} g(x)dx.$$

Функция $g(t)$ непрерывна на $\mathbf{R}$, следовательно, $f(t)$ всюду *дифференцируема* на $\mathbf{R}$, и $f'(t) = g(t)$ при всех t. Таким образом, приведенный на рисунке 4 график является и графиком функции $f'(t)$.

Исследуем функцию $f(t)$.

Так как $g(t) \geqslant 0$ при всех $t \in \mathbf{R}$, то $f(t)$ — *неубывающая* на всем $\mathbf{R}$ функция (следовательно, не имеет строгих экстремумов).

Заметим, что так как $g(t) = 0$ при $t \in (-\infty, 1] \cup [3, 4] \cup [6, +\infty)$, то на каждом из множеств $(-\infty, 1]$, $[3, 4]$ и $[6, +\infty)$ функция $f(t)$ *постоянна*. При этом на $(-\infty, 1]$ она равна 0, на $[3, 4]$ — площади одного полукруга, то есть $\pi/2$, на $[6, +\infty)$ функция $f(t)$ равна π.

Проанализируем поведение функции $f(t)$ при $t \in (1, 3)$ и $t \in (4, 6)$. Так как $g(t) > 0$ при $t \in (1, 3)$ и $t \in (4, 6)$, то на этих двух интервалах $f(t)$ строго возрастает.

Исследуем $f(t)$ на выпуклость и вогнутость при $t \in [1, 3]$ и $t \in [4, 6]$. Промежутки неубывания и невозрастания $f'(t) = g(t)$:

1. $t \in (1, 2)$ — $f'(t)$ строго возрастающая;
2. $t \in (2, 3)$ — $f'(t)$ строго убывающая;
3. $t \in (4, 5)$ — $f'(t)$ строго возрастающая;
4. $t \in (5, 6)$ — $f'(t)$ строго убывающая.

Следовательно, при $t \in (1, 2)$ и $t \in (4, 5)$ функция $f(t)$ является строго выпуклой, при $t \in (2, 3)$ и $t \in (5, 6)$ $f(t)$ является строго вогнутой. Точки 2 и 5 являются точками перегиба.

График функции $f(t)$ изображен на рисунке 5.

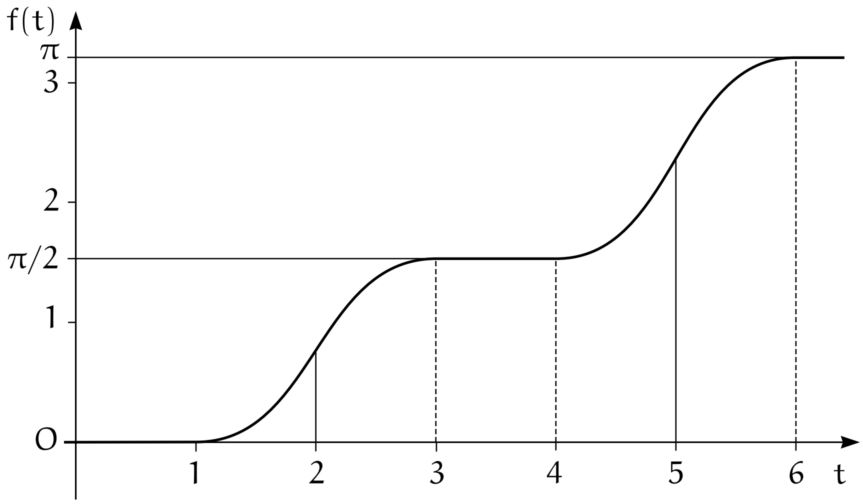

Рис. 5. График функции $f(t)$

Замечание. Для построения графика $g(t)$, вообще говоря, необязательно вводить аналитическое выражение (1). Можно использовать геометрические свойства фигуры F и определение $g(t)$.

Замечание. Точки интервалов постоянства функции формально подходят под определение как локального максимума, так и локального минимума. Точки 1 и 4 являются точками локального минимума, а точки 3 и 6 — точками локального максимума. Впрочем, при некоторых формах определения перегиба точки 1, 3, 4 и 6 могут трактоваться и как точки перегиба.

Решение задачи 2. Если $|x| < 1$, то ряд сходится как сумма двух бесконечно убывающих геометрических прогрессий. Если $|x| > 1$, то $|x^n - x^{2n}| = |x|^n |1 - x|^n \to \infty$ при $n \to \infty$, и ряд расходится, так как общий член ряда не стремится к нулю. При $x = -1$ ряд расходится, так как $x^n - x^{2n}$ при нечетных n равны -2, и значит не выполнено необходимое условие сходимости — стремление к нулю общего члена ряда. При $x = 1$ ряд сходится, так как все члены ряда равны нулю. Итак область сходимости данного ряда — полуинтервал $(-1, 1]$.

На отрезке $[0, 1]$ ряд не сходится равномерно. Действительно, исследовав поведение функции $u_n(x) = x^n - x^{2n}$ на отрезке $[0, 1]$, можно показать, что она достигает максимума в точке $x_n = 1/\sqrt[n]{2}$ и при этом $u_n(x_n) = 1/4$. Таким образом, общий член ряда не стремится к нулю *равномерно* на $[0, 1]$, то есть не выполнено необходимое условие равномерной сходимости ряда.

Отсутствие равномерной сходимости можно доказать другим способом.

Обозначим $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^n - x^{2n})$, $x \in [0, 1]$. Используя формулу для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получаем, что $S(x) = \dfrac{x}{1 - x^2}$ при $0 \leqslant x < 1$, и $S(1) = 0$. Таким образом, сумма ряда *разрывна* в точке $x = 1$, что в силу теоремы о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда непрерывных слагаемых, означает отсутствие равномерной сходимости.

Ответ. Ряд сходится на полуинтервале $(-1, 1]$. На отрезке $[0, 1]$ ряд не сходится равномерно.

Решение задачи 3. Так как матрица $I + A$ невырожденная, то число -1 не является собственным для матрицы A. В то же время матрица A имеет вещественное собственное число, поскольку ее порядок нечетный. Но ортогональная матрица может иметь в качестве собственных чисел только $+1$ и -1. Таким образом, у матрицы A имеется, и притом *единственное* собственное число 1. Обозначим через z соответствующий собственный вектор, то есть $Az = z$ и $z \neq 0$.

Пусть λ — собственное число матрицы B, а $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ — соответствующий ему собственный вектор, то есть $Ax_1 + x_2 = \lambda x_1$ и $x_1 + Ax_2 = \lambda x_2$. Тогда $x_1 = \lambda x_2 - Ax_2$ и $(A^2 - 2\lambda A + (\lambda^2 - 1)I)x_2 = 0$. Но $x_2 \neq 0$ (иначе $x_1 = 0$ и $x = 0$). Поэтому матрица

$$A^2 - 2\lambda A + (\lambda^2 - 1)I = (A - (\lambda + 1)I)(A - (\lambda - 1)I)$$

вырожденная. Следовательно, по крайней мере один из сомножителей является вырожденным.

Если $A - (\lambda + 1)I$ — вырожденная матрица, то $\lambda + 1$ является собственным числом матрицы A, то есть $\lambda + 1 = 1$ и $\lambda = 0$. Если положить $x_2 = z$ и $x_1 = 0 \cdot z - Az = -z$, то $Bx = 0$, так что число $\lambda = 0$ действительно собственное число матрицы B.

Если $A - (\lambda - 1)I$ — вырожденная матрица, то аналогично имеем $\lambda - 1 = 1$ и $\lambda = 2$. Положив $x_2 = z$ и $x_1 = 2z - Az = z$, получим $Bx = 2x$, то есть $\lambda = 2$ — собственное число матрицы B.

Ответ. Собственными числами матрицы B являются числа 0 и 2.

4.4 Ответы на тестовые вопросы

1. а) Да, б) Да, в) Нет, г) Нет, д) Нет.

2. а) Да, б) Да, в) Нет, г) Нет, д) Да.

3. а) Нет, б) Да, в) Нет, г) Нет, д) Нет.

4. а) Нет, б) Нет, в) Да, г) Да, д) Нет.

5. а) Нет, б) Да, в) Нет, г) Да.

6. а) Да, б) Нет, в) Нет, г) Да, д) Да.

7. а) Нет, б) Нет, в) Да, г) Нет, д) Нет, е) Да.

8. а) Нет, б) Да, в) Нет, г) Да, д) Нет.

9. а) Нет, б) Да, в) Нет, г) Нет, д) Да.

5 Формат вступительного экзамена 2002 г.

1. Экзамен по математике проводится в форме теста. Продолжительность экзамена 4 часа, максимальная оценка 12 баллов.

2. Цель теста:

   а) проверить степень усвоения абитуриентами основных математических понятий, определений, теорем (в частности их формулировок, условий, при которых они справедливы) и взаимосвязей между ними;

   б) проверить умение применять теорию для решения задач из разных разделов программы экзамена.

3. Тест состоит из трех разделов (частей), различающихся уровнем сложности. В пределах каждого уровня вопросы объединяются в блоки. В каждом блоке есть вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежит ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требует ответа «да» или «нет». При этом число ответов «да» («нет») в каждом блоке может быть разным.

4. Правила оценивания теста следующие:

   Для вопросов 1-го уровня сложности

   * за правильный ответ абитуриент получает «+1» очко,
   * за отсутствие ответа — «0» очков,
   * за неправильный ответ — «−1» очко.

   Для вопросов 2-го уровня сложности

   * за правильный ответ абитуриент получает «+2» очка,
   * за отсутствие ответа — «0» очков,
   * за неправильный ответ — «−2» очка.

   Для вопросов 3-го уровня сложности

   * за правильный ответ абитуриент получает «+3» очка,
   * за отсутствие ответа — «0» очков,
   * за неправильный ответ — «−3» очка.

5. Число баллов за тест определяется суммой очков, набранных при ответах на вопросы теста.

6. Во время экзамена запрещаются разговоры между абитуриентами, использование учебной и справочной литературы.

7. оценка «2» и ниже считается неудовлетворительной. Абитуриент, получивший неудовлетворительную оценку, к дальнейшим экзаменам не допускается.

8. В день объявления оценок за экзамен по математике абитуриенту предоставляется право ознакомиться со своей работой. При обнаружении технической ошибки в подсчете набранных очков абитуриент имеет право на апелляцию, которая подается в день объявления результатов экзамена и в тот же день рассматривается комиссией.

6 Подготовительные курсы по математике

В Российской Экономической Школе работают платные подготовительные курсы. Программы подготовительных курсов ориентированы на подготовку слушателей к сдаче вступительных экзаменов в РЭШ. Занятия на курсах ведут опытные преподаватели РЭШ. Подготовительные курсы завершаются письменными экзаменами, результаты которых могут быть засчитаны в качестве вступительных экзаменов.

Главная цель курсов:

* напомнить абитуриентам основные понятия математического анализа и линейной алгебры;
* прояснить те разделы теории, которым уделяется недостаточно внимания в традиционных курсах;
* разобрать решения типовых задач вступительных экзаменов в РЭШ.

Подготовительные курсы работают по двум программам:

* **Полный курс: февраль—июнь 2002 г.**
  Курс предусматривает систематическое рассмотрение всех разделов математического анализа и линейной алгебры в объеме программы вступительного экзамена в РЭШ. Занятия 2 раза в неделю — 3 ак. часа лекция, 2 ак. часа семинар. **Начало занятий — 12 февраля 2002 г.**

* **Интенсивный курс: май—июнь 2002 г.**
  В интенсивном курсе рассматриваются наиболее сложные разделы программы. Занятия: 2 лекции по 3 ак. часа в неделю. **Начало занятий — май 2002 г.**

Запись на курсы: Координатор подготовительных курсов — Кулагина Ольга Ивановна (332-4423, okulagin@nes.ru)

7 Дни открытых дверей

11 февраля 2002 г., (понедельник), 17:00

20 апреля 2002 г., (суббота), 11:00

Адрес РЭШ

117418, Москва, Нахимовский проспект, 47 (здание ЦЭМИ РАН), 17 этаж, офис 1721, проезд до ст. метро «Профсоюзная».